PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
2024, Segundo Semestre.

Interrogación 2
Ecuaciones Diferenciales

1. Calcule la solución general de la ecuación

$$x'' + 2\sqrt{2}x' + 2x = \cos(\sqrt{2}t).$$

Solución: La ecuación característica de la ecuación homogénea es $(r - \sqrt{2})^2 = 0$. Luego, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 t e^{-\sqrt{2}t},$$

con c_1 y c_2 constantes reales. Para la solución particular buscamos una solución de la forma $x_p(t) = A\cos(\sqrt{2}t) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)$, reemplazamos en la ecuación diferencial y despejamos las constantes. Los que nos da

$$x_p(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 t e^{-\sqrt{2}t} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t),$$

con c_1 y c_2 constantes reales.

Corrección:

a) 0,4 puntos por la solución general de la ecuación homogénea.

b) 0,6 puntos por la solución particular.

c) 0,2 puntos por la solución general.

2. Utilice el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea

$$x'' + 3x' + 2x = 4e^t.$$

3. La posición de un resorte oscila en torno a su punto de equilibrio de acuerdo a la ecuación

$$x'' + 2x = \cos(\sqrt{2}t)$$

donde el término $\cos(\sqrt{2}t)$ representa una fuerza externa ejercida sobre el resorte. Encuentre la solución que satisface la condición inicial $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$. ¿Es acotada la amplitud de la oscilación cuando t tiende a infinito?

Solución: La ecuación caracter´stica de la ecuación homogénea es $r^2 + 2 = 0$. Luego, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t),$$

con c_1 y c_2 constantes reales. Para la solución particular buscamos una solución de la forma $x_p(t) = At\cos(\sqrt{2}t) + Bt\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$, reemplazamos en la ecuación diferencial y despejamos las constantes. Los que nos da

$$x_p(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} t \operatorname{sen}(\sqrt{2}t).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{4} t \operatorname{sen}(\sqrt{2}t),$$

con c_1 y c_2 constantes reales. Usando las condiciones iniciales nos da que $c_1 = 0$ y que $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego, la solución al problema con condición inicial es

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{4} t \operatorname{sen}(\sqrt{2}t).$$

Como la solución particular tiene el termino t, vemos que la amplitud de la solución no es acotada cuanto t tiende a $+\infty$.

Corrección:

a) 0,2 puntos por la solución general de la ecuación homogénea.

b) 0,6 puntos por la solución particular.

c) 0,2 puntos por la solución solución al problema con condición inicial.

d) 0,2 puntos por decir que la amplitud es no acotada cuando t tiende a $+\infty$.

4. Encuentre un sistema de primer orden equivalente al sistema de segundo orden

$$\begin{cases} x'' - 5x + 4y = 0 \\ y'' + 4x - 5y = 0. \end{cases}$$

5. Encuentre la solución al sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 4$.