Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Pauta Interrogación 3

1. Resuelva el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} X$$

Solución: Buscamos valores propios:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 9 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)+9 = \lambda^2 - 6\lambda + 14 = 0 \iff \lambda = 3 \pm i\sqrt{5}.$$

Vectores propios asociados a $\lambda = 3 - i\sqrt{5}$:

$$\begin{pmatrix} 1-3+i\sqrt{5} & 9 \\ -1 & 5-3+i\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i\sqrt{5} & 9 \\ -1 & 2+i\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2+i\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que los vectores propios son de la forma $v = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Así, una solución del sistema es

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3-i\sqrt{5})t} = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \left(\cos(\sqrt{5}) - i\sin(\sqrt{5}t)\right)$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$X(t) = c_1 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{5}t) \right) + c_2 e^{3t} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{5}t) \right)$$

$$X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} (2c_1 + \sqrt{5}c_2)\cos(\sqrt{5}t) - (\sqrt{5}c_1 - 2c_2)\sin(\sqrt{5}t) \\ c_1\cos(\sqrt{5}t) - c_2\sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$$

Puntaje

- Determinar los valores propios correctamente (2 puntos)
- Encontrar un vector propio (2 punto)
- Escribir la solución general del sistema, en cualquiera de sus formas (2 punto). (Si sólo escribe la solución compleja $ve^{(a+ib)t}$ asignar 1 punto)

2. Encuentre $x(t)$ y $y(t)$ si

$$x'(t) = 3x - y + e^{2t}, \quad y'(t) = -x + 3y + e^{2t}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Solución:

El sistema se puede representar en forma matricial como $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ con $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$. Los valores propios de la matriz son $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$. Vectores propios asociados son $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, respectivamente, lo que define la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{bmatrix}$$

por lo que la solución del sistema homogéneo es

$$\mathbf{x}_h(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

La solución particular del sistema no homogéneo se obtiene

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds$$

La matriz inversa Φ^{-1} es $\Phi(s)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2s} & e^{-2s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix}$ lo que implica

$$\Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2s} & e^{-2s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s} \\ e^{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

En conclusión,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, por lo que la solución del problema de valor inicial es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = (1+t)e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Puntaje

- Encontrar correctamente solución homogénea (2 puntos)
- Plantear una forma correcta de encontrar solución particular (1 punto)
- Encontrar solución particular (1 punto)
- Encontrar solución del PVI (2 puntos)

3. (a) Considere el sistema $(S)\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{2x}{t^2} + \dfrac{2y}{t} \end{cases}$ para $t > 0$. Demuestre que la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix},$$

es una matriz fundamental para el sistema (S).

(b) Determina la matriz B tal que

$$\mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Escribimos el sistema (S) de la forma $Y' = A(t)Y$ donde $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

Notamos que $\Phi(t)$ es invertible porque $\det \Phi(t) = t^2 - 2t^2 = -t^2 \neq 0$ para todo $t > 0$. Además

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz $\Phi(t)$ satisface

$$A(t)\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \Phi'(t)$$

Entonces $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ y por lo tanto Φ es matriz fundamental del sistema (S)

(b) Recordamos que e^{tB} es una matriz fundamental que cumple $\Phi'(t) = B\Phi(t)$. Para $t = 0$, tenemos $\mathrm{e}^{0B} = I$. Así

$$B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tB}\bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t} & 4\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} \\ 6\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^t & 6\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^t & 6\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}\bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Puntaje

- Item (a): Justificar que $\Phi(t)$ es invertible (1 punto)
- Justifica que $A(t)\Phi(t) = \Phi'(t)$ (2 puntos)
- Item (b): Afirma que $\Phi'(t) = B\Phi(t)$ (1 punto)
- Encuentra B con la ecuación anterior (2 puntos). (Si encuentra B de otra forma pero está correcto, asignar los 3 puntos)

4. (a) Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 4y\left(1 + x^2 + y^2\right), \quad \frac{dy}{dt} = -x\left(1 + x^2 + y^2\right).$$

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ y determine las trayectorias del sistema. Luego, dibuje el plano de fase y concluya desde su dibujo qué tipo de punto crítico es $(0, 0)$ y su estabilidad.

(b) Encuentre los puntos de equilibrio del sistema y clasifique según tipo y por estabilidad (estable, inestable, asintóticamente estable).

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^2 - 1 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

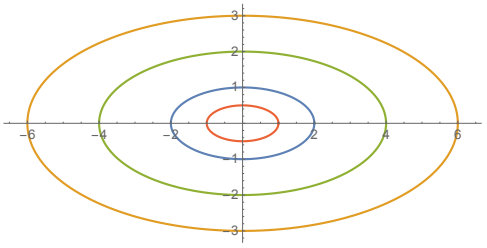
Solución:

(a) Notamos que

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y} \quad \Longrightarrow \quad 4ydy = -xdx$$

$$\Longrightarrow \quad y^2 + \frac{x^2}{4} = C$$

lo cual corresponde a una familia de elipses recorridas en sentido horario.



Por lo tanto el $(0, 0)$ es un centro estable.

(b) Si $y' = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$. Si $x = 0$, $x' = 0$ implica que $y = \pm 1$ mientras que si $y = 0$, no hay soluciones reales para $x' = 0$. Por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema son $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

La matriz jacobiana del sistema es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $|J(x, y)| = -4x^2 - 4y^2 < 0$.

La matriz es simétrica por lo que tiene valores propios reales. Como el determinante es el producto de los valores propios, de lo anterior concluimos que en cada punto de equilibrio, la matriz jacobiana tiene valores propios reales de signo diferentes. Por lo tanto, ambos son puntos silla inestables.

Puntaje

- Item (a): Determina las trayectorias del sistema (2 puntos)
- Concluye que $(0, 0)$ es centro estable (1 punto)
- Item (b): Encuentra los 2 puntos críticos (1 punto)
- Encuentra la matriz jacobiana del sistema (1 punto)
- Clasifica correctamente los 2 puntos críticos (1 punto).