MAT1640, semestre 2021/2

Pauta Interrogación 1

Profesores Alejandro Ramirez & Christian Sadel

Problema 1, Versión 1:

a) Encuentra al menos dos soluciones de PVI

$$y' = 2\,y^{2/3}, \qquad y(-3) = 0$$

b) Explique por que no se aplica el teorema de unicidad en este caso.

Solución: a) Soluciones constantes: (puntos criticos) $y^{2/3} = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Este solución satisface el PVI. Asi $y = 0$ es la primera solución. (2 puntos)

Soluciones no constantes: separar variables:

$$\int y^{-2/3}\mathrm{d}y = \int 2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 3y^{1/3} = 2x + C \Leftrightarrow y = \left(\frac{2x+C}{3}\right)^3 \quad \text{(1 punto)}$$

Para el PVI, $x = -3,\ y = 0$ se tiene $C = 6$, así $y = \left(\frac{2x+6}{3}\right)^3$ es la segunda solución. (1 punto)

b) Tenemos $\dfrac{\mathrm{d}\,(2y^{2/3})}{\mathrm{d}y} = \dfrac{4}{3}\,y^{-1/3}$ que no es definido y así no continua para $y = 0$. Así el teorema de unicidad (y existencia) no esta aplicable para PVI's con $y = 0$. (2 puntos)

Problema 1, Versión 2:

a) Encuentra al menos dos soluciones de PVI

$$y' = 3\,y^{4/5}, \qquad y(-2) = 0$$

b) Explique por que no se aplica el teorema de unicidad en este caso.

Solución: a) Soluciones constantes: (puntos criticos) $y^{4/5} = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
Este solución satisface el PVI. Asi $y = 0$ es la primera solución. (2 puntos)

Soluciones no constantes: separar variables:

$$\int y^{-4/5}\mathrm{d}y = \int 3\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5y^{1/5} = 3x + C \Leftrightarrow y = \left(\frac{3x+C}{5}\right)^5 \quad \text{(1 punto)}$$

Para el PVI, $x = -2,\ y = 0$ se tiene $C = 6$, así $y = \left(\frac{3x+6}{5}\right)^5$ es la segunda solución. (1 punto)

b) Tenemos $\dfrac{\mathrm{d}\,(3y^{4/5})}{\mathrm{d}y} = \dfrac{12}{5}\,y^{-1/5}$ que no es definido y así no continua para $y = 0$. Así el teorema de unicidad (y existencia) no esta aplicable para PVI's con $y = 0$. (2 puntos)

Problema 2, Versión 1:
Resuelve la ecuación

$$\left(x + e^{x^2}\right)\,y' \,+\, \left(1 + 2x\,e^{x^2}\right)y \,=\, 0$$

Solución: Notemos que

$$(x + e^{x^2})' = 1 + 2xe^{x^2}.$$

(2 puntos)

Luego la ecuación se puede escribir como

$$((x + e^{x^2})y)' = 0.$$

(2 puntos)

Luego

$$y(x) = \frac{C}{x + e^{x^2}}.$$

(2 puntos)

Problema 2, Versión 2:
Resuelve la ecuación

$$\left(x^2 + e^x\right)\,y' \,+\, (2x + e^x)\,y \,=\, 0$$

Solución: Notemos que

$$(x^2 + e^x)' = 2x + e^x,$$

(2 puntos)

por lo que

$$((x^2 + e^x)y)' = 0.$$

(2 puntos)

Luego

$$y = \frac{C}{x^2 + e^x}.$$

(2 puntos)

Problema 3, Versión 1:
Encuentra la solución implicita general de EDO

$$15y^2 + 3\cos(y) + x + \left(10xy - x\sin(y) - \frac{1}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Solución:

$$M_y = 30y - 3\sin(y)\ , \quad N_x = 10y - \sin(y) + 2x^{-3}$$

asi

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{20y - 2\sin(y) - 2x^{-3}}{10xy - x\sin(y) - x^{-2}} = \frac{2}{x}$$

que depende solamente de x. Por eso hay factor integrante $\mu(x)$ (2 puntos)

$|\mu| = \exp(\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x) = e^{2\ln|x|+c} = C|x|^2$, usa por ejemplo $\mu = x^2$. (1 punto)

Asi obtenemos que

$$15x^2y^2 + 3x^2\cos(y) + x^3 + \left(10x^3y - x^3\sin(y) - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

es exacta. Resuelve

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 15x^2y^2 + 3x^2\cos(y) + x^3$$

se tiene $\Psi(x,y) = 5x^3y^2 + x^3\cos(y) + x^4/4 + h(y)$ (1 punto). Usando en

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 10x^3y - x^3\sin(y) - 1$$

se ve $h'(y) = -1$, por ejemplo $h(y) = -y$. (1 punto).

Asi, la solución general esta:

$$5x^3y^2 + x^3\cos(y) + x^4/4 - y = C \qquad \text{(1 punto)}$$

Problema 3, Versión 2:
Encuentra la solución implicita general de EDO

$$15y^2 + 5\sin(y) + x + \left(6xy + x\cos(y) - \frac{1}{x^4}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Solución:

$$M_y = 30y + 5\cos(y)\ , \quad N_x = 6y + \cos(y) + 4x^{-5}$$

asi

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{24y + 4\cos(y) - 4x^{-5}}{6xy + x\cos(y) - x^{-4}} = \frac{4}{x}$$

que depende solamente de x. Por eso hay factor integrante $\mu(x)$ (2 puntos)

$|\mu| = \exp(\int \frac{4}{x}\mathrm{d}x) = e^{4\ln|x|+c} = C|x|^4$, usa por ejemplo $\mu = x^4$. (1 punto)

Asi obtenemos que

$$15x^4y^2 + 5x^4\sin(y) + x^5 + \left(6x^5y + x^5\cos(y) - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

es exacta. Resuelve

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 15x^4y^2 + 5x^4\sin(y) + x^5$$

se tiene $\Psi(x,y) = 3x^5y^2 + x^5\sin(y) + x^6/6 + h(y)$ (1 punto). Usando en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 6x^5y + x^5\cos(y) - 1$$

se ve $h'(y) = -1$, por ejemplo $h(y) = -y$. (1 punto).

Asi, la solución general esta:

$$3x^5y^2 + x^5\sin(y) + x^6/6 - y = C \qquad \text{(1 punto)}$$

Problema 4, Versión 1:
Un estanque contiene inicialmente 2000 litros de agua pura. Ingresa agua contaminada con 3 gramos por litro de químicos a una tasa de 200 litros por minuto. El agua sale del estanque a una tasa de 200 litro por minuto. Escriba un problema de valores iniciales para la cantidad de químicos $R(t)$ en el tiempo t en el estanque. Calcule la cantidad de químicos que hay en el estanque luego de 3 días.

Solución: Sabemos que ingresan 200 litros por minuto de agua contaminada con 3 gramos por litro de químicos. Luego, la cantidad de químicos aumenta en

$$200 \times 3\ gr = 600\ gr$$

(0.5 punto).

por minuto, porducto del ingreso del agua. Por otra parte, la concentración de químicos en el instante t es de

$$\frac{R(t)}{2000}\frac{gr}{l}.$$

(0.5 punto).

Luego, como el agua sale a una tasa de 200 litros por minuto, la concentración disminuye en un minuto en

$$200 \times \frac{R(t)}{2000}\ gr = \frac{R(t)}{10}\ gr,$$

(0.5 punto).

producto del agua que sale. Por otra parte, como inicialmente el agua es pura, tenemos que

$$R(0) = 0.$$

Se puede entonces concluir que el PVI para la cantidad de químicos en el instante t es

$$\frac{dR(t)}{dt} = 600 - \frac{R(t)}{10}$$

$$R(0) = 0.$$

(1.5 punto).

Para solucionar la ecuación, escribimos el lado izquierdo como

$$\frac{dR(t)}{dt} + \frac{R(t)}{10} = 600.$$

Esta ecuación tiene como factor integrante

$$u(t) = e^{\frac{t}{10}},$$

por lo que se puede reescribir como

$$\left(e^{\frac{t}{10}} R(t)\right)' = e^{\frac{t}{10}} 600.$$

Integrando obtenemos

$$e^{\frac{t}{10}} R(t) = e^{\frac{t}{10}} 6000 + C.$$

Como la condición inicial es $R(t) = 0$ vemos que $C = -6000$. Luego

$$R(t) = (1 - e^{-\frac{t}{10}})6000.$$

(2 punto).

Recordemos que el tiempo en esta identidad se expresa en unidades de minuto. Por otra parte

$$3 \text{ días} = 3 \times 24 \times 60 \text{ minutos} = 4320 \text{ minutos}.$$

Luego, la cantidad de químicos en el estanque luego de tres dí as es de

$$R(4320) = (1 - e^{-432})6000,$$

(1 punto).

que es muy cercano a 6000.

Problema 4, Versión 2:
Un estanque contiene inicialmente 1000 litros de agua pura. Ingresa agua contaminada con 3 gramos por litro de químicos a una tasa de 100 litros por minuto. El agua sale del estanque a una tasa de 100 litro por minuto. Escriba un problema de valores iniciales para la cantidad de químicos $R(t)$

en el tiempo t en el estanque. Calcule la cantidad de químicos que hay en el estanque luego de 3 días.

Solución: Sabemos que ingresan 100 litros por minuto de agua contaminada con 3 gramos por litro de químicos. Luego, la cantidad de químicos aumenta en

$$100 \times 3 \ gr = 300 \ gr$$

(0.5 punto).

por minuto, porducto del ingreso del agua. Por otra parte, la concentración de químicos en el instante t es de

$$\frac{R(t)}{1000}\frac{gr}{l}.$$

(0.5 punto).

Luego, como el agua sale a una tasa de 100 litros por minuto, la concentración disminuye en un minuto en

$$100 \times \frac{R(t)}{1000} \ gr = \frac{R(t)}{10} \ gr,$$

(0.5 punto).

producto del agua que sale. Por otra parte, como inicialmente el agua es pura, tenemos que

$$R(0) = 0.$$

Se puede entonces concluir que el PVI para la cantidad de químicos en el instante t es

$$\frac{dR(t)}{dt} = 300 - \frac{R(t)}{10}$$

$$R(0) = 0.$$

(1.5 punto).

Para solucionar la ecuación, escribimos el lado izquierdo como

$$\frac{dR(t)}{dt} + \frac{R(t)}{10} = 300.$$

Esta ecuación tiene como factor integrante

$$u(t) = e^{\frac{t}{10}},$$

por lo que se puede reescribir como

$$\left(e^{\frac{t}{10}}R(t)\right)' = e^{\frac{t}{10}}300.$$

Integrando obtenemos

$$e^{\frac{t}{10}} R(t) = e^{\frac{t}{10}} 3000 + C.$$

Como la condición inicial es $R(t) = 0$ vemos que $C = -3000$. Luego

$$R(t) = (1 - e^{-\frac{t}{10}})3000.$$

(2 punto).

Recordemos que el tiempo en esta identidad se expresa en unidades de minuto. Por otra parte

$$3 \text{ días} = 3 \times 24 \times 60 \text{ minutos} = 4320 \text{ minutos}.$$

Luego, la cantidad de químicos en el estanque luego de tres dí as es de

$$R(4320) = (1 - e^{-432})3000,$$

(1 punto).

que es muy cercano a 3000.