Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 9

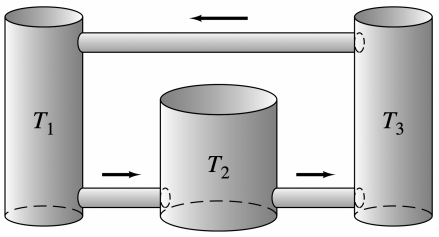
Sistemas de ecuaciones lineales

1. Transforme la siguiente ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones de primer orden equivalente:

$$x^{(4)} + 6x'' - 3x' + x = \cos 3t$$

2. Tres tanques de fermentación de 100 litros están conectados como se indica en la figura, y las mezclas en los tres se conservan uniformes por agitación. Sea $x_i(t)$ la cantidad (en gramos) de alcohol en el tanque T_i en el tiempo $t (i = 1, 2, 3)$. Suponga que la mezcla circula entre los tanques a una velocidad de 10litros/min. Demuestre que las ecuaciones siguientes modelan la dinámica de la concentración de soluto en los tanques.

$$\begin{cases} 10x_1' = -x_1 + \quad x_3 \\ 10x_2' = x_1 - x_2 \\ 10x_3' = \qquad x_2 - x_3. \end{cases}$$



3. Transforme la ecuación diferencial

$$t^3x^{(3)} - 2t^2x'' + 3tx' + 5x = \ln t$$

en un sistema de ecuaciones de primer orden y luego en una ecuación matricial de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t).$$

4. Sea $\mathbb{M}_{n\times m}$ el espacio vectorial de matrices de $n \times m$ con entradas reales. Considere $A : I \to \mathbb{M}_{n\times m}$ una función matricial derivable. Demuestre que

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$$

para cada valor de $t \in I$ donde $A(t)$ sea una matriz invertible.

Solución general de un sistema de EDOs lineales

5. Sea I un intervalo real y $C(I, \mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales continuas de I en $\mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{x}_1(t), ...\mathbf{x}_n(t)$ soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \quad t \in I.$$

Demuestre que $\mathbf{x}_1(t), ...\mathbf{x}_n(t)$ son linealmente independientes en $C(I, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\mathbf{x}_1(a), ...\mathbf{x}_n(a)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ para cualquier número $a \in I$ fijo.

6. Muestre que los vectores de funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en toda la recta real. ¿Por qué se concluye que no existe una matriz continua $\mathbf{P}(t)$ tal que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ sean ambas soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$?

7. Demuestre que los vectores $\mathbf{x}_1 = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

son soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -8 & -11 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Luego con el wronskiano demuestre que son linealmente independientes y escriba la solución general del sistema homogéneo.

8. Diagonalice la siguiente matriz, si es posible. Identifique los valores propios y espacios propios asociados.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$