MAT 1640

Pauta Interrogación 1

14 Septiembre 2020

1A. Cuál es la solución del PVI siguiente?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = -1.$$

(a) $y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

(b) $y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

(c) $y(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

(d) $y(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

Solución. El factor integrante es

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x},$$

y la multiplicación por $\rho(x)$ da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-2x} &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-2x} \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x} = \int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + C \\
&\Leftrightarrow y(x) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{x}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición inicial $y(0) = -1$ da $-1 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$, de modo que

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

1B. Cuál es la solución del PVI siguiente?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = 1.$$

(a) $y(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{2x}$

(b) $y(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{2x}$

(c) $y(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{2x}$

(d) $y(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{2x}$

Solución. El factor integrante es

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int(-2)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x},$$

y la multiplicación por $\rho(x)$ da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-3x} &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{-3x} \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-2x} = \int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-2x} = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x} + C \\
&\Leftrightarrow y(x) = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{2x}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición inicial $y(0) = 1$ da $1 = -\frac{1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{4}{3}$, de modo que

$$y(x) = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

2A. Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(1) El PVI $y' = 6xy^{2/3}$, $y(1) = 0$, tiene una única solución definida en un intervalo en torno de $x = 1$.

(2) El PVI $y' = \tan(x^2 + y)$, $y(1) = \pi/2$, tiene una única solución definida en un intervalo en torno de $x = 1$.

(3) El PVI $y' = S(y)x^{1/3}$, $y(0) = 1$, donde $S(y) := \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$, no tiene ninguna solución.

(4) Dos distintas curvas soluciones de $y' = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ no pueden cruzarse, ni estar tangentes.

(a) (2) y (4)

(b) (1) y (4)

(c) (1) y (2)

(d) (2), (3) y (4)

Solución. Afirmación (1) es **falsa** ya que el PVI tiene por lo menos dos soluciones. Una es $y(x) \equiv 0$. Otra podemos encontrar separando variables:

$$\int y^{-2/3}\,\mathrm{d}y = \int 6x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; 3y^{1/3} = 3x^2 + C.$$

Poniendo la condición inicial, obtenemos $y(x) = (x^2 - 1)^3$.

Afirmación (2) es **cierta** pues los datos del PVI satisfacen las hipotesis del Teorema de Existencia y Unicidad: $f(x, y) = \tan(x^2 + y)$ y $\partial_y f(x, y) = \sec^2(x^2 + y)$ son continuas en todo punto de su dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, y en particular en una vecindad de $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

Afirmación (3) es **falsa**. Podemos ver que $y(x) \equiv 1$ satisface el PVI dado.

Afirmación (4) es **cierta**. La función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\partial_y f(x, y) = y(x^2 + y^2 + 1)^{-1/2}$ son bien definidas y continuas en todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Luego, por el TEU, por cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pasa una única curva solución. Por eso, las curvas soluciones distintas no pueden cruzarse, ni estar tangentes en ningún punto.

2B. Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(1) El PVI $y' = \cot(x^2 + y)$, $y(1) = 0$, tiene una única solución definida en un intervalo en torno de $x = 1$;

(2) El PVI $y' = 5x^2y^{2/5}$, $y(1) = 0$, tiene más de una solución definida en un intervalo en torno de $x = 1$;

(3) El PVI $y' = S(y)x^{1/3}$, $y(0) = -1$, donde $S(y) := \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ 1 & y > -1 \end{cases}$, no tiene ninguna solución;

(4) Dos distintas curvas soluciones de $y' = \sqrt{e^{x-y} + 1}$ no pueden cruzarse, ni estar tangentes.

(a) (1), (2) y (4)

(b) (2) y (4)

(c) (1) y (2)

(d) (1), (3) y (4)

Solución. Afirmación (1) es **cierta** pues los datos del PVI satisfacen las hipotesis del Teorema de Existencia y Unicidad: $f(x,y) = \cot(x^2+y)$ y $\partial_y f(x,y) = -\csc^2(x^2+y)$ son continuas en todo punto de su dominio $D = \{(x,y) : x^2+y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, y en particular en una vecindad de $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Afirmación (2) es **cierta** ya que el PVI tiene por lo menos dos soluciones. Una es $y(x) \equiv 0$. Otra podemos encontrar separando variables:

$$\int y^{-2/5}\,\mathrm{d}y = \int 5x^2\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; (5y^{3/5})/3 = 5x^3/3 + C.$$

Poniendo la condición inicial $y(1) = 0$, obtenemos $C = -5/3$ y luego, $y(x) = (x^3-1)^{5/3}$.

Afirmación (3) es **falsa**. Podemos ver que $y(x) \equiv -1$ satisface el PVI dado:

$$y'(x) \equiv 0 = S(-1)x^{1/3} = S(y(x))x^{1/3}.$$

Afirmación (4) es **cierta**. La función $f(x,y)$ y su derivada parcial $\partial_y f(x,y) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x-y}(\mathrm{e}^{x-y}+1)^{-1/2}$ son bien definidas y continuas en todo punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Luego, por el TEU, por cada punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ pasa solo una única curva solución. Por eso, las curvas soluciones distintas no pueden cruzarse, ni estar tangentes en ningún punto.

3A. Cuál es la solución general de la ecuación siguiente?

$$x\,\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x + 3y.$$

(a) $y(x) = x^3 - Cx^2$ con C una constante

(b) $y(x) = Cx^3 - 2x^2$ con C una constante

(c) $y(x) = x^3 - Cx$ con C una constante

(d) $y(x) = Cx^2 - 2x$ con C una constante

(e) $y(x) = Cx^3 - 2x$ con C una constante

Solución. Si $x = 0$, entonces la ecuación implica que $y(0) = 0$. Si no, la división por x da la ecuación homogénea

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4 + 3\,\tfrac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Con el cambio de variable

$$y = vx, \quad \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\,\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
v + x\,\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 4 + 3v &\Leftrightarrow x\,\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(2+v) \\
&\overset{v\neq -2}{\Leftrightarrow} \int \tfrac{\mathrm{d}v}{2+v} = \int \tfrac{2\,\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \ln|2+v| = 2\ln|x| + C_1 \\
&\Leftrightarrow \ln|2+v| = \ln(x^2) + C_1 \\
&\Leftrightarrow |2+v| = C_2x^2 \quad \big(C_2 := e^{C_1} > 0\big) \\
&\Leftrightarrow v = \pm C_2x^2 - 2 \\
&\Leftrightarrow y(x) = \pm C_2x^3 - 2x \quad (v = y/x).
\end{aligned}$$

También debemos considerar la solución $v = -2 \Leftrightarrow y(x) = -2x$ que descartamos al hacer la división por $2+v$. Entonces, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = Cx^3 - 2x \text{ con } C \in \mathbb{R} \quad (\text{el caso } C = 0 \text{ da } y(x) = -2x).$$

3B. Cuál es la solución general de la ecuación siguiente?

$$x\,\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + 3y.$$

(a) $y(x) = x^3 - Cx^2$ con C una constante

(b) $y(x) = Cx^3 - x^2$ con C una constante

(c) $y(x) = x^3 - Cx$ con C una constante

(d) $y(x) = Cx^2 - x$ con C una constante

(e) $y(x) = Cx^3 - x$ con C una constante

Solución. Si $x = 0$, entonces la ecuación implica que $y(0) = 0$. Si no, la división por x da la ecuación homogénea

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 + 3\,\tfrac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Con el cambio de variable

$$y = vx, \quad \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\,\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} v + x\,\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2 + 3v &\Leftrightarrow x\,\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1+v) \\ &\overset{v\neq -1}{\Leftrightarrow} \int \tfrac{\mathrm{d}v}{1+v} = \int \tfrac{2\,\mathrm{d}x}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln|1+v| = 2\ln|x| + C_1 \\ &\Leftrightarrow \ln|1+v| = \ln(x^2) + C_1 \\ &\Leftrightarrow |1+v| = C_2 x^2 \quad \big(C_2 := e^{C_1} > 0\big) \\ &\Leftrightarrow v = \pm C_2 x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow y(x) = \pm C_2 x^3 - x \quad (v = y/x). \end{aligned}$$

También debemos considerar la solución $v = -1 \Leftrightarrow y(x) = -x$ que descartamos al hacer la división por $1 + v$. Entonces, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = Cx^3 - x \text{ con } C \in \mathbb{R} \quad (\text{el caso } C = 0 \text{ da } y(x) = -x).$$

4A. Considere el PVI

$$y' = y^4 - x, \quad y(0) = 0.$$

Cuál de los siguientes valores está más cerca al valor $y(10000)$? (*Sugerencia*: Puede ser útil esbozar el campo de pendientes).

(a) 10

(b) -10

(c) -10000

(d) 10^{16}

Solución. Analicemos el problema cualitativamente utilizando el campo de pendientes. Vemos que las curvas isoclinas de pendiente m tienen la ecuación

$$y^4 - x = m \;\Leftrightarrow\; x = y^4 - m.$$

Del dibujo del campo de pendientes (Figura 1), se puede ver que la curva solución con $y(0) = 0$ va a descrecer para $x > 0$ y eventualmente estará atrapada en la región entre los ramos negativos de las isoclinas $m = 1$ y $m = -1$. Entonces para valores de x positivos grandes, se tiene

$$-1 \leq y^4 - x \leq 1 \quad \text{e} \quad y < 0 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt[4]{x+1} \leq y(x) \leq -\sqrt[4]{x-1}.$$

De aquí podemos concluir que $y(10000) \approx -\sqrt[4]{10000} = -10$.

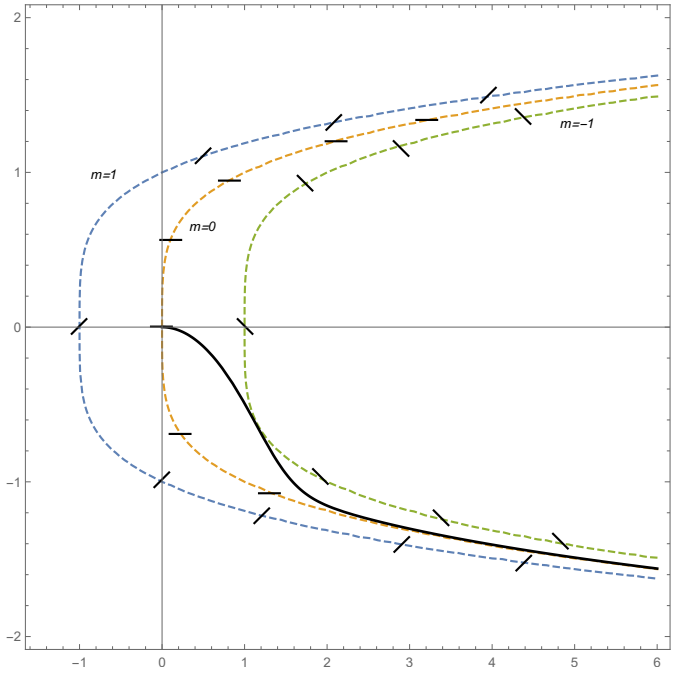


Figure 1: Isoclinas del campo pendiente $y^4 - x$ y curva solución del PVI

4B. Considere el PVI

$$y' = x - y^4, \quad y(0) = 0.$$

Cuál de los siguientes valores está más cerca al valor $y(10000)$? (*Sugerencia*: Puede ser útil esbozar el campo de pendientes).

(a) 10

(b) -10

(c) -10000

(d) 10^{16}

Solución. Analicemos el problema cualitativamente utilizando el campo de pendientes. Vemos que las curvas isoclinas de pendiente m tienen la ecuación

$$x - y^4 = m \;\Leftrightarrow\; x = y^4 + m.$$

Del dibujo del campo de pendientes (Figura 2), se puede ver que la curva solución con $y(0) = 0$ va a crecer para $x > 0$ y eventualmente estará atrapada en la región entre los ramos positivos de las isoclinas $m = 1$ y $m = -1$. Entonces para valores de x positivos grandes, se tiene

$$-1 \le y^4 - x \le 1 \quad \text{e} \quad y > 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[4]{x-1} \le y(x) \le \sqrt[4]{x+1}.$$

De aquí podemos concluir que $y(10000) \approx \sqrt[4]{10000} = 10$.

5A. Sea el PVI

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x + 2y - 4)^2, \quad y(4) = 0.$$

Entonces este PVI:

(a) tiene una infinidad de soluciones.

(b) tiene dos soluciones.

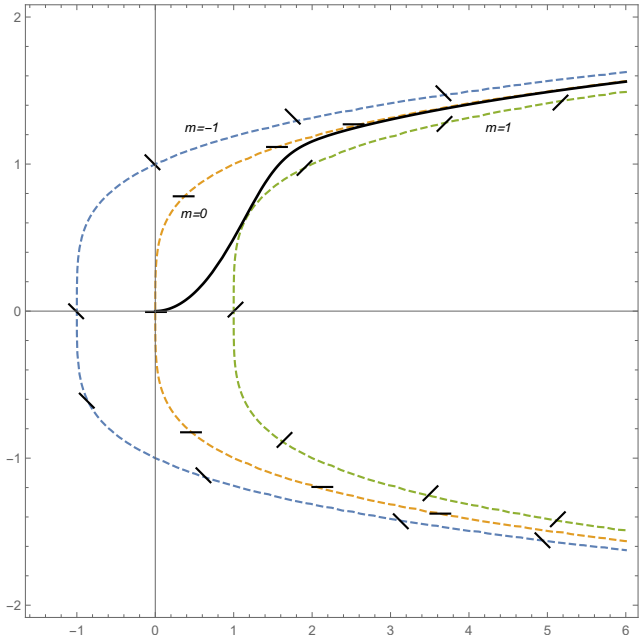


Figure 2: Isoclinas del campo pendiente $x - y^4$ y curva solución del PVI

(c) tiene una solución única $y(x)$ definida para todos $x \in \mathbb{R}$.

(d) tiene una solución única $y(x)$ solo definida para x en un intervalo acotado.

(e) no tiene solución.

Solución. Con la sustitución $v = x+2y-4$, obtenemos $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 1\right)$, lo que da la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 1\right) = v^2 &\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2v^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow x = \int \tfrac{\mathrm{d}v}{2v^2+1} \\
&\Leftrightarrow x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}v\right) + C \\
&\Leftrightarrow v = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\sqrt{2}(x - C)\right) \\
&\Leftrightarrow y(x) = \tfrac{1}{2^{3/2}} \tan\left(\sqrt{2}(x - C)\right) - \tfrac{1}{2}(x - 4) \quad (v = x + 2y - 4).
\end{aligned}$$

Como la condición inicial $y(4) = 0$ da $C = 4$, obtenemos

$$y(x) = \tfrac{1}{2^{3/2}} \tan\left(\sqrt{2}(x - 4)\right) - \tfrac{1}{2}(x - 4).$$

Entonces, el PVI tiene una solución única definida en el intervalo acotado

$$-\tfrac{\pi}{2} < \sqrt{2}(x - 4) < \tfrac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x \in \left(4 - \tfrac{\pi}{2^{3/2}}, 4 + \tfrac{\pi}{2^{3/2}}\right).$$

5B. Sea el PVI

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x + 2y - 3)^2, \quad y(3) = 0.$$

Entonces este PVI:

(a) tiene una infinidad de soluciones.

(b) tiene dos soluciones.

(c) tiene una solución única $y(x)$ definida para todos $x \in \mathbb{R}$.

(d) tiene una solución única $y(x)$ solo definida para x en un intervalo acotado.

(e) no tiene solución.

Solución. Con la sustitución $v = x+2y-3$, obtenemos $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 1\right)$, lo que da la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 1\right) = v^2 &\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2v^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow x = \int \tfrac{\mathrm{d}v}{2v^2+1} \\
&\Leftrightarrow x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}v\right) + C \\
&\Leftrightarrow v = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\sqrt{2}(x-C)\right) \\
&\Leftrightarrow y(x) = \tfrac{1}{2^{3/2}} \tan\left(\sqrt{2}(x-C)\right) - \tfrac{1}{2}(x-3) \quad (v = x+2y-4).
\end{aligned}$$

Como la condición inicial $y(3) = 0$ da $C = 3$, obtenemos

$$y(x) = \tfrac{1}{2^{3/2}} \tan\left(\sqrt{2}(x-3)\right) - \tfrac{1}{2}(x-3).$$

Entonces, el PVI tiene una solución única definida en el intervalo acotado

$$-\tfrac{\pi}{2} < \sqrt{2}(x-3) < \tfrac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x \in \left(3 - \tfrac{\pi}{2^{3/2}}, 3 + \tfrac{\pi}{2^{3/2}}\right).$$

6A. La solución $x(t)$ del PVI

$$\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + tx = tx^4, \quad x(1) = \mathrm{e}^{-1},$$

tiene valor $x(-1)$ igual a:

(a) e

(b) $(\mathrm{e}^{3/2} + \mathrm{e}^{-3/2})^{-1/3}$

(c) $(\mathrm{e}^{3/2} - \mathrm{e}^{-3/2})^{1/3}$

(d) e^{-1}

Solución. La ecuación es de tipo Bernoulli con $n = 4$. La solución que buscamos es distinta de 0, así que podemos definir el cambio de variable $v = x^{1-4} = x^{-3}$. Reemplazando $x = v^{-1/3}$ en la ecuación, llegamos a la ecuación lineal para v

$$\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - 3tv = -3t$$

cual tiene solución general

$$v(t) = \mathrm{e}^{3t^2/2} \int (-3t) e^{-3t^2/2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3t^2/2}(e^{-3t^2/2} + C) = 1 + C\,\mathrm{e}^{3t^2/2}\,.$$

Entonces, $x(t) = v^{-1/3}(t) = (1 + C\,\mathrm{e}^{3t^2/2})^{-1/3}$ y la constante C que produce la solución del PVI específico es $C = \mathrm{e}^{3/2} - \mathrm{e}^{-3/2}$. De todos modos, notamos que la solución $x(t)$ es una función par en t, entonces $x(-1) = x(1) = \mathrm{e}^{-1}$.

6B. La solución $x(t)$ del PVI

$$\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - tx = tx^4, \quad x(1) = \mathrm{e},$$

tiene valor $x(-1)$ igual a:

(a) e

(b) $(\mathrm{e}^{3/2}+\mathrm{e}^{-3/2})^{-1/3}$

(c) $(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2})^{1/3}$

(d) e^{-1}

Solución. La ecuación es de tipo Bernoulli con $n=4$. La solución que buscamos es distinta de 0, así que podemos definir el cambio de variable $v = x^{1-4} = x^{-3}$. Reemplazando $x = v^{-1/3}$ en la ecuación, llegamos a la ecuación lineal para v

$$\tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 3tv = -3t$$

cual tiene solución general

$$v(t) = e^{-3t^2/2}\int(-3t)\,\mathrm{e}^{3t^2/2}\,\mathrm{d}t = e^{-3t^2/2}(-\mathrm{e}^{3t^2/2}+C) = -1+Ce^{-3t^2/2}.$$

Entonces, $x(t) = v^{-1/3}(t) = (-1+C\,\mathrm{e}^{3t^2/2})^{-1/3}$ y la constante C que produce la solución del PVI específico es $C = \mathrm{e}^{3/2}+\mathrm{e}^{-3/2}$. De todos modos, notamos que la solución $x(t)$ es una función par en t, entonces $x(-1) = x(1) = \mathrm{e}$.

7A. Se aplica una fuerza horizontal constante $F = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$ sobre un móvil con masa $m = 2\,\mathrm{kg}$ ubicado en la recta real. Dado que el móvil tiene posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$, calcular en cuanto tiempo el móvil recorre 100 metros.

(a) $\sqrt{10}$ segundos

(b) $2\sqrt{10}$ segundos

(c) $3\sqrt{10}$ segundos

(d) $4\sqrt{10}$ segundos

Solución. Sea $x(t)$ la posición del móvil en el tiempo t. La ley de Newton implica que $F = mx''(t)$, lo que da en nuestro caso

$$10 = 2x''(t) \;\Leftrightarrow\; x''(t) = 5 \;\Leftrightarrow\; x'(t) = 5t+v_0 \;\Leftrightarrow\; x(t) = \tfrac{5}{2}t^2+v_0t+x_0.$$

Como $x_0 = v_0 = 0$, obtenemos $x(t) = \frac{5}{2}t^2$. Entonces, para recorrer 100 metros se tiene

$$100 = \tfrac{5}{2}t^2 \;\Leftrightarrow\; t^2 = 40 \;\Rightarrow\; t = 2\sqrt{10}\text{ segundos.}$$

7B. Se aplica una fuerza horizontal constante $F = 20\,\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$ sobre un móvil con masa $m = 3\,\mathrm{kg}$ ubicado en la recta real. Dado que el móvil tiene posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = 0$ en el tiempo $t = 0$, calcular en cuanto tiempo el móvil recorre 200 metros.

(a) $\sqrt{15}$ segundos

(b) $2\sqrt{15}$ segundos

(c) $3\sqrt{15}$ segundos

(d) $4\sqrt{15}$ segundos

Solución. Sea $x(t)$ la posición del móvil en el tiempo t. La ley de Newton implica que $F = mx''(t)$, lo que da en nuestro caso

$$20 = 3x''(t) \;\Leftrightarrow\; x''(t) = \tfrac{20}{3} \;\Leftrightarrow\; x'(t) = \tfrac{20}{3}t + v_0 \;\Leftrightarrow\; x(t) = \tfrac{10}{3}t^2 + v_0 t + x_0.$$

Como $x_0 = v_0 = 0$, obtenemos $x(t) = \frac{10}{3}t^2$. Entonces, para recorrer 200 metros se tiene

$$200 = \tfrac{10}{3}t^2 \;\Leftrightarrow\; t^2 = 60 \;\Rightarrow\; t = 2\sqrt{15} \text{ segundos.}$$

8A. El intervalo máximo de existencia de la solución de

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}(y^2+1), \quad y(0) = 1,$$

es:

(a) $\big(-\ln(1+3\pi/4), -\ln(1-\pi/4)\big)$

(b) $(-\infty, \infty)$

(c) $\big(\ln(1-\pi/4), \ln(1+3\pi/4)\big)$

(d) $(-\pi/2, \pi/2)$

Solución. La ecuación es separable:

$$\int (y^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{-x}\,dx \;\Leftrightarrow\; \arctan y = -\,\mathrm{e}^{-x} + C.$$

De la condición inicial obtenemos $C = \arctan 1 + \mathrm{e}^0 = \pi/4 + 1$ y el intervalo máximo de existencia de esta solución está determinado por el hecho que $\arctan y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Entonces,

$$-\pi/2 < -\,\mathrm{e}^{-x} + C < \pi/2 \;\Leftrightarrow\; C - \pi/2 < \mathrm{e}^{-x} < C + \pi/2,$$

es decir $1 - \pi/4 < \mathrm{e}^{-x} < 1 + 3\pi/4$. Concluimos que el intervalo máximo de existencia es

$$-\ln(1+3\pi/4) < x < -\ln(1-\pi/4).$$

8B. El intervalo máximo de existencia de la solución de

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x}(y^2+1), \quad y(0) = -1,$$

es:

(a) $\big(-\ln(1+3\pi/4), -\ln(1-\pi/4)\big)$

(b) $(-\infty, \infty)$

(c) $\big(\ln(1-\pi/4), \ln(1+3\pi/4)\big)$

(d) $(-\pi/2, \pi/2)$

Solución. La ecuación es separable:

$$\int (y^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{x}\,dx \;\Leftrightarrow\; \arctan y = \mathrm{e}^{x} + C.$$

De la condición inicial obtenemos $C = \arctan(-1) - \mathrm{e}^0 = -\pi/4 - 1$ y el intervalo máximo de existencia de esta solución está determinado por el hecho que $\arctan y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Entonces,

$$-\pi/2 < \mathrm{e}^{x} - \pi/4 - 1 < \pi/2 \;\Leftrightarrow\; 1 - \pi/4 < \mathrm{e}^{x} < 1 + 3\pi/4,$$

Concluimos que el intervalo máximo de existencia es

$$\ln(1-\pi/4) < x < \ln(1+3\pi/4).$$

9A. Cuál es la solución del problema siguiente?

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = -(1+2x)\,\mathrm{e}^{-x}, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

(a) $y(x) \equiv 0$

(b) $y(x) = \mathrm{e}^{-x}$

(c) $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}$

(d) $y(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$

Solución. El factor integrante es

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int(-2x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^2},$$

y la multiplicación por $\rho(x)$ da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x^2}\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy\,\mathrm{e}^{-x^2} = -(1+2x)\,\mathrm{e}^{-(x+x^2)} &\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -(1+2x)\,\mathrm{e}^{-(x+x^2)} \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x^2} = -\int (1+2x)\,\mathrm{e}^{-(x+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-(x+x^2)} + C \\
&\Leftrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{x^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ da

$$0 + \lim_{x\to\infty} C\,\mathrm{e}^{x^2} = 0 \Rightarrow C = 0,$$

de modo que

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

9B. Cuál es la solución del problema siguiente?

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = -2(1+x)\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

(a) $y(x) \equiv 0$

(b) $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

(c) $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}$

(d) $y(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 1$

Solución. El factor integrante es

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int(-2x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^2},$$

y la multiplicación por $\rho(x)$ da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x^2}\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy\,\mathrm{e}^{-x^2} = -2(1+x)\,\mathrm{e}^{-(2x+x^2)} &\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2(1+x)\,\mathrm{e}^{-(2x+x^2)} \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x^2} = -2\int (1+x)\,\mathrm{e}^{-(2x+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-(2x+x^2)} + C \\
&\Leftrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-2x} + C\,\mathrm{e}^{x^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ da

$$0 + \lim_{x\to\infty} C\,\mathrm{e}^{x^2} = 0 \Rightarrow C = 0,$$

de modo que

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

10A. La solución del PVI

$$(\mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{xy})y' = -\,\mathrm{e}^x - y\,\mathrm{e}^{xy}, \quad y(0) = 1,$$

tiene valor $y(1)$ igual a:

(a) 0

(b) e

(c) e +2

(d) 2 − e

Solución. Escribimos la ecuación en forma diferencial

$$(\mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ya que

$$(\mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{xy})_y = \mathrm{e}^{xy} + xy\,\mathrm{e}^{xy} = (\mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{xy})_x,$$

la ecuación es exacta, entonces existe $F(x, y)$ definida sobre $\mathbb{R}^2$, tal que

$$F_x = \mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{xy} \quad \text{y} \quad F_y = \mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{xy}\,.$$

Integrando la primera ecuación en x obtenemos

$$F(x, y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{xy} + f(y)$$

y reemplazando en la segunda, llegamos a la ecuación $f'(y) = \mathrm{e}^y$. Entonces podemos tomar $f(y) = \mathrm{e}^y$ y las soluciones de la ecuación diferencial deberían satisfacer:

$$F(x, y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^y = C$$

para constantes apropiadas C. Poniendo la condición inicial, encontramos que

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} + 2.$$

Cuando $x = 1$, se ve que $y = 0$.

10B. La solución del PVI

$$(\mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{-xy})y' = -\,\mathrm{e}^x - y\,\mathrm{e}^{-xy}, \quad y(1) = 0,$$

tiene valor $y(0)$ igual a:

(a) 1

(b) e

(c) e +2

(d) 2 − e

Solución. Escribimos la ecuación en la forma diferencial

$$(\mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{-xy})\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{-xy})\mathrm{d}y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ya que

$$(\mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{-xy})_y = \mathrm{e}^{-xy} - xy\,\mathrm{e}^{xy} = (\mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{-xy})_x,$$

la ecuación es exacta, entonces existe $F(x,y)$ definida sobre $\mathbb{R}^2$, tal que

$$F_x = \mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{-xy} \quad \text{y} \quad F_y = \mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^{-xy}\,.$$

Integrando la primera ecuación en x obtenemos

$$F(x,y) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-xy} + f(y)$$

y reemplazando en la segunda, llegamos a la ecuación $f'(y) = \mathrm{e}^y$. Entonces podemos tomar $f(y) = \mathrm{e}^y$ y las soluciones de la ecuación diferencial deberían satisfacer:

$$F(x,y) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-xy} + \mathrm{e}^y = C$$

para constantes apropiadas C. Poniendo la condición inicial $y(1) = 0$, encontramos que

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-xy} + \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}\,.$$

Cuando $x = 0$, se ve que $y = 1$.

11A. Cuál es la solución general del problema siguiente?

$$(y''')^4 = 0, \quad y(0) = \pi.$$

(a) $y(x) = Ax^2 - \pi$ con A constante

(b) $y(x) = Ax^2 + \pi$ con A constante

(c) $y(x) = Ax - \pi$ con A constante

(d) $y(x) = Ax + \pi$ con A constante

(e) $y(x) = Ax^2 + Bx - \pi$ con A, B constantes

(f) $y(x) = Ax^2 + Bx + \pi$ con A, B constantes

Solución. La única manera de cumplir esta ecuación es si y verifica $y''' = 0$. Haciendo tres integraciones sucesivas, uno obtiene

$$y''(x) = C_1 \;\Rightarrow\; y'(x) = C_1 x + C_2 \;\Rightarrow\; y(x) = \tfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Usando la condición $y(0) = \pi$, uno obtiene $C_3 = \pi$. Entonces, la solución general es

$$y(x) = \tfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + \pi.$$

Usando las notaciones $A = \frac{C_1}{2}$ y $B = C_2$, obtenemos

$$y(x) = Ax^2 + Bx + \pi.$$

11B. Cuál es la solución general del problema siguiente?

$$(y''')^6 = 0, \quad y(0) = 2\pi.$$

(a) $y(x) = Ax^2 - 2\pi$ con A constante

(b) $y(x) = Ax^2 + 2\pi$ con A constante

(c) $y(x) = Ax - 2\pi$ con A constante

(d) $y(x) = Ax + 2\pi$ con A constante

(e) $y(x) = Ax^2 + Bx - 2\pi$ con A, B constantes

(f) $y(x) = Ax^2 + Bx + 2\pi$ con A, B constantes

Solución. La única manera de cumplir esta ecuación es si y verifica $y''' = 0$. Haciendo tres integraciones sucesivas, uno obtiene

$$y''(x) = C_1 \;\Rightarrow\; y'(x) = C_1 x + C_2 \;\Rightarrow\; y(x) = \tfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Usando la condición $y(0) = 2\pi$, uno obtiene $C_3 = 2\pi$. Entonces, la solución general es

$$y(x) = \tfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + 2\pi.$$

Usando las notaciones $A = \frac{C_1}{2}$ y $B = C_2$, obtenemos

$$y(x) = Ax^2 + Bx + 2\pi.$$

12A. En la comunidad Twitter de Chile que cuenta con 5 millones de usuarios se propaga una noticia falsa (aka "fake news") alegando que Arturo Vidal ha dejado FC Barcelona. A principio del lunes 14 de septiembre (a las 00:00 horas), 10% de los usuarios la han leido y el número se incrementa a una razón de 250 mil por día. Asumiendo que el número de usuarios que han leido la mentira sigue la **ley logística**, en qué día de la semana se espera que la "fake news" alcanzará a 50% de los usuarios Twitter de Chile?

(a) martes 15 de septiembre

(b) miércoles 16 de septiembre

(c) jueves 17 de septiembre

(d) viernes 18 de septiembre

Solución. El número de usuarios que han leido la noticia falsa $P(t)$, t días después de las 00:00 horas del lunes 14 de septiembre, sigue la ley logística:

$$\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k(M - P)P,$$

donde la capacidad máxima $M = 5$ millones es el número total de usuarios Twitter de Chile. De la información dada sabemos que al principio $P_0 := P(0) = pM$, donde $p = 0.1$, y que P crece a razón de $r = 0.25$ millones por día, es decir

$$r := P'(0) = kMP_0(1 - P_0) = kM^2 p(1 - p) = 0.25.$$

Entonces $kM = \frac{r}{Mp(1-p)}$ y de la formula para la solución de la ecuación logística tenemos

$$P(t) = \frac{M}{1 + (M/P_0 - 1)e^{-kMt}} \;\Leftrightarrow\; q(t) := \frac{P(t)}{M} = \frac{1}{1 + (p^{-1} - 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{rt}{Mp(1-p)}}}.$$

Queremos saber en qué momento t, la proporción de usuarios que habrán visto la noticia es $q = 0.5$. Resolviendo para t en la última ecuación, obtenemos

$$t = \left(\ln \frac{p^{-1} - 1}{q^{-1} - 1}\right) \frac{Mp(1-p)}{r}.$$

Reemplazando en la formula $p = 0.1$, $q = 0.5$, $M = 5$ y $r = 0.25$, concluimos que

$$t = \left(\ln \frac{10-1}{2-1}\right) \frac{5(0.1)(0.9)}{0.25} = (\ln 9)(1.8) \approx 3.955 \text{ días},$$

es decir, la noticia llegará a 50% de los usuarios el jueves 17 de septiembre (al final del día).

12B. En la comunidad Twitter de Chile que cuenta con 5 millones de usuarios se propaga una noticia falsa (aka "fake news") alegando que Arturo Vidal ha dejado FC Barcelona. A principio del lunes 14 de septiembre (a las 00:00 horas), 20% de los usuarios la han leido y el número se incrementa a una razón de 250 mil por día. Asumiendo que el número de usuarios que han leido la mentira sigue la **ley logística**, en qué día de la semana se espera que la "fake news" alcanzará a 50% de los usuarios Twitter de Chile?

(a) martes 15 de septiembre

(b) miércoles 16 de septiembre

(c) jueves 17 de septiembre

(d) viernes 18 de septiembre

Solución. El número de usuarios que han leido la noticia falsa $P(t)$, t días después de las 00:00 horas del lunes 14 de septiembre, sigue la ley logística:

$$\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k(M-P)P,$$

donde la capacidad máxima $M = 5$ millones es el número total de usuarios Twitter de Chile. De la información dada sabemos que al principio $P_0 := P(0) = pM$, donde $p = 0.2$, y que P crece a razón de $r = 0.25$ millones por día, es decir

$$r := P'(0) = kMP_0(1-P_0) = kM^2p(1-p) = 0.25.$$

Entonces $kM = \frac{r}{Mp(1-p)}$ y de la formula para la solución de la ecuación logística tenemos

$$P(t) = \frac{M}{1+(M/P_0-1)e^{-kMt}} \;\Leftrightarrow\; q(t) := \frac{P(t)}{M} = \frac{1}{1+(p^{-1}-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{rt}{Mp(1-p)}}}.$$

Queremos saber en qué momento t, la proporción de usuarios que habrán visto la noticia es $q = 0.5$. Resolviendo para t en la última ecuación, obtenemos

$$t = \left(\ln \frac{p^{-1}-1}{q^{-1}-1}\right) \frac{Mp(1-p)}{r}.$$

Reemplazando en la formula $p = 0.2$, $q = 0.5$, $M = 5$ y $r = 0.25$, concluimos que

$$t = \left(\ln \frac{5-1}{2-1}\right) \frac{5(0.2)(0.8)}{0.25} = (\ln 4)(3.2) \approx 4.436 \text{ días},$$

es decir, la noticia llegará a 50% de los usuarios el viernes 18 de septiembre (un poco antes del mediodía).