Desarrollo Examen
MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales

1. Considere el PVI siguiente:

$$(x-1)y' = y^2 - 4\,, \quad y(1) = 2\,.$$

Pruebe que el PVI no tiene solución única.

Solución: Despejando se obtiene que $y' = f(x,y) = \dfrac{y^2-4}{x-1}$).

Observamos que no podemos utilizar el Teorema de existencia y unicidad en el punto $(1,2)$ porque las funciones f y $\partial_y f$ no son continuas en la línea $x = 1$.

Describe la discontinuidad de $f(x,y)$ y sus derivadas **1.0 ptos**

Notamos que $y(x) = 2$ es solución del PVI Explicita solución $y \equiv 2$ **1.0 ptos**
y que $y(x) = -2$ no funciona porque no satisface la condición inicial.

Si $y(x) \neq 2$, resolvemos la ecuación diferencial por separación de variables, es decir,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-4} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R},$$

o sea

$$\int \left(\frac{1/4}{y-2} - \frac{1/4}{y-2} \right) \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = \ln|x-1| + C_1\,, \quad \text{Plantea ecuación para } y \textbf{ 2.0 ptos}$$

y por lo tanto,

$$\frac{y-2}{y+2} = C(x-1)^4\,, C \in \mathbb{R}. \quad \text{Plantea ecuación para } y \textbf{ 0.5 ptos}$$

Despejando se obtiene que

$$y_c(x) = \frac{2 + 2C(x-1)^4}{1 - C(x-1)^4}. \quad \text{Encuentra } y \text{ general } \textbf{1.0 ptos}$$

En resumen y_C es solución con $y_c(1) = 2$ para cualquier valor de C Lo que prueba que el PVI tiene infinitas soluciones. Verifica condición inicial **0.5 ptos**

2. Resolver la ecuación integral

$$y = -2\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau + U(t-2) + 1,$$

donde

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y reescribimos la ecuación de la forma siguiente

$$y = -2\,t * y + U(t-2) + 1. \quad \boxed{\text{Reconoce convolución} \quad \textbf{0.5 ptos}}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$Y(s) = -2\,\frac{Y(s)}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s} + \frac{1}{s}. \qquad \boxed{\text{Aplica transformada} \quad \textbf{2.0 ptos}}$$

Luego

$$Y(s) = \frac{s(1+\mathrm{e}^{-2s})}{s^2+2}\,. \qquad \boxed{\text{Despejar } Y(s) \quad \textbf{0.5 ptos}}$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+2} + \frac{s}{s^2+2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2}\right) \\ &\quad \boxed{\text{Usa linealidad de la inversa} \quad \textbf{0.5 ptos}} \end{aligned}$$

Además

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+2}\right) = U(t-2)\cos\sqrt{2}(t-2)\,. \quad \boxed{\text{Calcula inversa} \quad \textbf{1.0 ptos}}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2}\right) = \cos(\sqrt{2}t)\,. \qquad \boxed{\text{Calcula inversa} \quad \textbf{0.5 ptos}}$$

Por lo tanto la solución es

$$y(t) = U(t-2)\cos\sqrt{2}(t-2) + \cos(\sqrt{2}t)\,. \quad \boxed{\text{Explicita solución} \quad \textbf{1.0 ptos}}$$

3. Encuentre la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$y'' + y = 4\,\delta(t-2) + \cos(2t)$$

con la condición inicial $y(0) = y'(0) = 0$ donde δ representa a la función delta de Dirac en 0.

Solución: Escribamos $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación y considerando la condición inicial tenemos que

$$s^2Y(s) + Y(s) = 4\mathcal{L}[\delta(t-2) + \cos(2t)](s). \quad \text{Aplica TL } \mathbf{1.0\ ptos}$$

Luego

$$s^2Y(s) + Y(s) = 4e^{-2s} + \frac{s}{s^2+4}. \quad \text{Calcula TL } \mathbf{1.0\ ptos}$$

Despejando,

$$Y(s) = \frac{4e^{-2s}}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}. \quad \text{Despeja } Y(s) \ \mathbf{0.5\ ptos}$$

Calculamos transformadas inversas

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4e^{-2s}}{s^2+1}\right) = 4U(t-2)\,\mathrm{sen}(t-2). \quad \text{Calcula transformada inversa } \mathbf{1.5\ ptos}$$

con U definido como antes. Por otra parte

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4}.$$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{1}{3}\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(2t). \quad \text{Calcula transformada inversa } \mathbf{1.5\ ptos}$$

y se sigue que

$$y(t) = 4U(t-2)\,\mathrm{sen}(t-2) + \frac{1}{3}\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(2t)\,. \quad \text{Explicita solución } \mathbf{0.5\ ptos}$$

4. Considere el sistema

$$x' = -x + \operatorname{sen}(y)\,, \qquad y' = 2x\,.$$

a) Determine todos los puntos de equilibrio.

b) Clasifíquelos como estables e inestables.

c) Calcule $\lim_{t\to\infty} \vec{v}(t)$ donde $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ es la solución del sistema que pasa por $(0, \frac{7\pi}{6})$.

Solución:

Sol a) Buscamos los puntos que cumplan $x' = 0$, $y' = 0$ es decir:

$$-x + \operatorname{sen}(y) = 0\,, \qquad 2x = 0.$$

Los puntos de equilibrio (o puntos críticos del sistema son

$$(x, y) = (0, n\pi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$ Calcula puntos de equilibrio **0.5 ptos**

Sol b) A continuación, para clasificar estos puntos, calculamos la respectiva matriz Jacobiana.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & \cos(y) \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y calculando el jacobiano en los puntos críticos, se obtiene que

$$J(0, n\pi) = \begin{pmatrix} -1 & (-1)^n \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J(0, n) = 2(-1)^{n+1}$$

Verifica las hipótesis de H-G se en los puntos de equilibrio **0.5 ptos**

Luego, se cumplen las hipótesis del Teorema de Hartman - Grobman , es decir, el comportamiento del sistema original corresponde desde el punto de vista de las estabilidad (y del tipo) al sistema lineal asociado en cada punto de equilibrio. Explica conclusión de H-G **1.0 ptos**

Debemos distinguir dos casos, a saber:

Caso 1: n par.

En este caso los valores propios son $\lambda = -2, \lambda_2 = 1$. Con lo cual los puntos críticos resultas ser puntos tipo silla, luego inestables.
Clasifica los puntos de equilibrio **1.0 ptos**

Caso 2: n impar.

En este caso los valores propios son $\lambda = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}i}{2}$. Por lo tanto en este caso los puntos resultan ser del tipo espiral, asintóticamente estables.
Clasifica los puntos de equilibrio **1.0 ptos**

Sol c) El punto $(0, \frac{7\pi}{6})$ está más cerca del punto de equilibrio $(0, \pi)$. Luego, la trayectoria se encuentra dentro de la influencia de ese punto. Por otro lado, $(0, \pi)$ es un punto de equilibrio que es una espiral asintóticamente estable, luego la trayectoria $\vec{v}(t)$ tiende al punto de equibrio $(0, \pi)$ cuando $t \to \infty$. Calcula y explica el límite **2.0 ptos**

Solución: Alternativa.

Llamemos $J(a, b)$ al jacobiano del campo en (a, b).

Se calcula que el jacobiano en los puntos críticos,

$$J(0, n\pi) = \begin{pmatrix} -1 & (-1)^n \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ Calcula Jacobianos en ptos. críticos **1.0 ptos**

$\det J(0, n\pi) = 2(-1)^{n+1} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, lo cual implica que el Teorema de Hartman-Grobman, es aplicable. Verifica hipótesis de Teoream de H-G **1.0 ptos**

Caso 1 Si n es par, tenemos $\det J(0, n\pi) = -2 < 0$ que es equivalente a la existencia de dos valores propios reales de signo opuesto. Por el teorema de Hartman-Grobman, en este caso $p_n = (0, n\pi)$ es silla. Luego ellos son inestables.
Clasifica tipo de estabilidad **1.0 ptos**

Caso 2 Si n es impar.

Tenemos que $\det J(0, n\pi) = 2 > 0$.

Además, la traza de $J(0, n\pi) = -1 < 0$ Por lo tanto, en este caso hay dos valores propios con parte real estrictamente negativa. Por el Teorema de Hartman-Grobman, en este caso $q_n = (0, n\pi)$ es asintóticamente) estable.
Clasifica tipo de estabilidad **1.0 ptos**

Obs. Como la traza de $J(0, n\pi))^2 - 4 \det J(0, n\pi) = -7 < 0$, la conclusión más precisa es que el punto $(0, \pi)$ es espiral estable pero no se exige (este clasificación) para la conclusión de la parte b)

Explica que la c.i. está cerca del punto crítico $(0, \pi)$. **1.0 ptos**

Concluye que el límite es $(0, \pi)$ **1.0 ptos** argumentando que es una espiral estable.