Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Matemática
Segundo semestre 2017

Pauta Interrogación 1

MAT1640

1. Una solución salina entra a razón constante de 4 litros por minuto en un tanque que en principio contenía 200 litros de agua pura. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque a razón de 6 litros por minuto. Si la concentración de sal en la solución que entra es de 1kg por litro de agua, determine:

   a) La ecuación diferencial que describe la situación descrita.
   Solución:

   Si $x(t)$ es la función que modela la cantidad de sal, en kilos, después de t minutos iniciado el proceso, la situación descrita se modela mediante la ecuación

   $$x'(t) + \frac{3x(t)}{100 - t} = 4$$

   b) Encuentre la cantidad de sal en el estanque después de t minutos.
   Solución:

   Observamos que la ecuación obtenida anteriormente es lineal, un factor integrante para esta ecuación está dado por $\mu(x) = (100-t)^{-3}$, al multiplicar la ecuación por este factor obtenemos

   $$\left(x(t)(100 - t)^{-3}\right)' = 4(100 - t)^{-3}$$

   integrando obtenemos que la solución general está dada por $x(t) = C(100 - t)^3 + 2(100 - t)$, como el estanque inicialmente no tenía sal tenemos que $C = 2 \cdot 100^{-2}$.
   Por lo tanto la función que describe la cantidad de sal en el estanque pasado t minutos es:

   $$x(t) = \frac{2}{100^2}(100 - t)^3 + 2(100 - t) \text{ para } t \in [0, 100).$$

   c) ¿Es posible que la concentración de sal por litro de agua en el estanque sea la mitad de la concentracción de la salmuera que ingresa? Explique.
   Solución:

   Observemos que el volumen de salmuera en el tanque después de t minutos es $200-2t$ entonces, la pregunta equivale a determinar si la ecuación $x(t)/(200 - 2t) = 1/2$ tiene solución en el intervalo $[0, 100)$.
   La ecuación anterior no tiene soluciones reales, por lo tanto no es posible que la concentración de sal en el estanque sea $0,5$ kg por litro de agua.

2. a) Encuentre la solución general de la ecuación $(x^2 + 2y^2)dx = xy\,dy$.

Solución:

Al escribir la ecuación como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$ podemos ver que la ecuación es homogénea.

Haciendo la sustitución $z = y/x$ obtenemos la ecuación $\dfrac{z}{1+z^2}dz = \dfrac{1}{x}dx$ cuya solución general, dada de manera explícita, es

$$y^2 = Kx^4 - x^2 \text{ con } K \neq 0$$

b) Resuelva el problema de valor inicial $y' = \tan^2(x + y)$, $y(2\pi) = 0$.
Sugerencia: Use sustitución adecuada.

Solución:

haciendo la sustitución $z = x + y$, la ecuación queda

$$z' - 1 = \tan^2(z)$$

la ecuación anterior es equivalente a $\cos^2(z)dz = dx$ integrando obtenemos que la solución general de esta ecuación es $2z + \text{sen}(2z) = 4x + C$, volviendo a las variables iniciales tenemos que $2y + \text{sen}(2x+2y) = 2x + C$, reemplazando las condiciones iniciales obtenemos que $C = -4\pi$ por lo tanto la solución a problema de valor inicial es

$$2y + \text{sen}(2x + 2y) = 2x - 4\pi$$

3. Considere la ecuación $y' = y^m \text{sen}(y)\cos(y)$

a) Determine y clasifique los puntos de equilibro de la ecuación para $m = 2$.

Solución:

Sea $f(y) = y^2\text{sen}(y)\cos(y)$, los puntos de equilibrio son los puntos tales que $f(y) = 0$, luego corresponden a todos los puntos de la forma $y_0 = \dfrac{k\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que para estos puntos tenemos que $f'(y_0) = y_0^2$ si k es par y distinto de cero, en tal caso tenemos que los puntos de equilibrio son intestables. Si k es impar $f'(y_0) = -y_0^2$ en tal caso corresponde a puntos de equilibrio estables. observe que f antes de $y_0 = 0$ es negativa y después es positiva por lo tanto corresponde a un equilibrio inestable.

b) ¿Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y = 0$ sea un punto de equlibrio estable?

Solución:

Observe que si m es par entonces la función f cambia el signo de negativo a positivo en $y = 0$, por lo que cero sería un punto de equilibrio inestable, si m es impar el signo de f no cambia por lo tanto $y = 0$ sería un punto de equilibrio semiestable, entonces $y = 0$ nunca es un punto de equilibrio estable.

4. Considere el problema de valor inicial

$$(x + 1)y' = (y - 2)y \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

a) Determine para qué pares (x_0, y_0) el problema de valor inicial tiene solución única. Encuentre dicha solución.

Solución:

El Teorema de existencia y unicidad garantiza que el problema tiene solución única para

$x_0 \neq -1$. Si $x_0 = -1$ e $y_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 2$ el problema no tiene solución, basta con reemplazar en la ecuación. En el par $(-1, 0)$ existe la solución constante $y = 0$, análogamente para el par $(-1, 2)$ existe lasolución constante $y = 2$, veamos si en estos casos existen más soluciones.

La solución general de la ecuación planteada es

$$y(x) = \frac{2}{1 + C(x+1)^2} \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

y corresponde a una familia de funciones que pasa por $(-1, 2)$, ninguna de ellas pasa por $(-1, 0)$. Por lo tanto solo en $(-1, 0)$ también existe solución única.

b) Determine el máximo intervalo de definición de la solución con valor inicial y(1)=4.

Solución:

De lo anterior tenemos que reemplazando la condición inicial obtenemos que $C = -1/8$ y dicha solución es válida en $(-1 - \sqrt{8}, -1 + \sqrt{8})$