Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
2 Semestre de 2016

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Interrogación N° 2

1. Resuelva, para la función incógnita $x(t)$, el Problema de Valores Iniciales

$$x''' + 3x'' - 4x = 3t; \qquad x(0) = 1; \qquad x'(0) = 0; \qquad x''(0) = -1.$$

Respuesta : La solución general es $x = x_H + x_P$ donde x_P es alguna solución particular y x_H la solución *general* del caso homogéneo, $x''' + 3x'' - 4x = 0$.

- Para hallar x_H consideramos la ecuación característica asociada a la ecuación homogénea: $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$.
  Claramente , $r = 1$ es una solución. Dividiendo por (r-1) obtenemos $(r+2)^2$ que posee la raíz $r = -2$ con multiplicidad 2, lo cual tenemos que

$$x_H = C_1\, e^t + C_2\, e^{-2t} + C_3\, te^{-2t},$$

- Para hallar x_P usamos el método de los coeficientes indeterminados, buscando solución del tipo $x_P = A + Bt$, con A, B coeficientes por determinar.
  Sustituyendo en la ecuación obtenemos $4A + 4Bt = -3t$, de modo que $A = 0$; $B = -3/4$ y por tanto,

$$x_P = \frac{3}{4}\, t\,.$$

Por tanto, $x = C_1\, e^t + C_2\, e^{-2t} + C_3\, te^{-2t} - \dfrac{3}{4}\, t.$

Derivando dos veces, evaluando en $t = 0$ y usando las condiciones iniciales, llegamos al sistema

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 - 2C_2 + C_3 = \frac{3}{4}$$

$$C_1 + 4C_2 - 4C_3 = -1$$

cuyas soluciones son $C_1 = \dfrac{2}{3}\,; \quad C_2 = \dfrac{1}{3}\,; \quad C_3 = \dfrac{3}{4}\,,$ por lo cual

$$x(t) = \frac{2}{3}\, e^t + \frac{1}{3}\, e^{-2t} + \frac{3}{4}\, te^{-2t} - \frac{3}{4}\, t.$$

2. Del techo cuelga un resorte que tiene una constante de rigidez $k = 5$ y en cuyo extremo libre se encuentra un *peso* de 8 libras. En $t = 0,$ se estira el resorte $0,5$ pies bajo la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad dirigida hacia arriba de 3 pie/seg. Si el medio ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea, expresar la ecuación del movimiento en la forma $A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$. ¿Vuelve el peso a pasar por la posición de equilibrio? Si así es, indique el instante en que pasa por primera vez por ella. *(Las unidades están todas en un mismo sistema. Use g=32).*

solución: La constante de amortiguación es, de acuerdo al enunciado, $c = 1$.

El movimiento es, pues, gobernado por el P.V.I.

$$\frac{8}{32}\,x'' + x' + 5x = 0; \qquad x(0) = \frac{1}{2}; \qquad x'(0) = -3$$

o, equivalentemente,

$$x'' + 4x' + 20x = 0; \qquad x(0) = \frac{1}{2}; \qquad x'(0) = -3.$$

Siendo las raíces de la ecuación característica $-2 \pm 4i,$ la solución general de la ecuación asociada es

$$x(t) = e^{-2t}(\,C_1\cos(4t) + C_2\,\mathrm{sen}(4t)\,).$$

Las condiciones iniciales implican que $C_1 = 1/2;\quad C_2 = -1/2,$ de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-2t}}{2}\,(\,\cos(4t) - \mathrm{sen}(4t)\,) \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\,(\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(4t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(4t)\,) \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\,(\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(4t) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\,\mathrm{sen}(4t)\,) \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Siendo el movimiento subamortiguado, la masa vuelva a pasar infinitas veces por el origen. La primera de ellas ocurre cuando

$$4t + \frac{3\pi}{4} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\pi}{16}\ \text{segundos}$$

3. Resuelva por series de potencias el problema $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Respuesta : Sea la solución buscada

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{entonces,} \\ y'(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ y''(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) m a_{m+1} x^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

Entonces,

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

mientras que

$$4xy' = \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (x^2-1)y'' + 4xy' + 2y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \\ &= (2a_0 - 2a_2) + (6a_1 - 6a_3)x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} + 4n a_n + 2a_n \right] x^n \\ &= (2a_0 - 2a_2) + (6a_1 - 6a_3)x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n^2+3n+2)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} \right] x^n \\ &= (2a_0 - 2a_2) + (6a_1 - 6a_3)x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} \right] x^n. \end{aligned}$$

Igualando a cero, todos los coeficientes deben ser cero. Por lo tanto,

$$a_2 = a_0; \qquad a_3 = a_1; \quad \text{y, para } n \geq 2, \quad a_{n+2} = a_n.$$

Esto es,

$$a_0 \;=\; a_2 \;=\; a_4 \;=\; \cdots \qquad \text{y} \qquad a_1 \;=\; a_3 \;=\; a_5 \;=\; \cdots$$

de modo que

$$\begin{aligned} y(x) \;&=\; a_0(1 \,+\, x^2 \,+\, x^4 \,+\, \cdots) \,+ a_1(x \,+\, x^3 \,+\, x^5 \,+\, \cdots) \\ &=\; a_0\,\frac{1}{1-x^2} \,+\, a_1\,\frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que $a_0 \,=\, y(0) \,=\, 1$ y $a_1 \,=\, y'(0) \,=\, 2$ de modo que

$$y(x) \;=\; \frac{1+2x}{1-x^2}\,.$$

4. Usando Transformadas de Laplace resuelva el Problema de Valor Inicial

$$x'' - x = \begin{cases} t & \text{si} \quad t < 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases} \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Solución: Usando la función $\mathcal{U}$ de Heaviside, la ecuación se puede escribir

$$x'' - x = t - t\mathcal{U}(t-1).$$

Aplicando Transformada de Laplace a ambos lados de ella obtenemos

$$\begin{aligned} (s^2-1)\,\mathcal{L}\{x(t)\} - s\underbrace{x(0)}_{0} - \underbrace{x'(0)}_{0} &= \mathcal{L}\{t - t\mathcal{U}(t-1)\} \\ (s^2-1)\,\mathcal{L}\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

de modo que,

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s^2(s^2-1)} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{1}{s(s^2-1)}\right)$$

y por tanto,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{1}{s(s^2-1)}\right)\right\}.$$

Tenemos que

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)}$$

de donde,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = -t + \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2}.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{s(s^2-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{1}{s(s^2-1)} &= -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \\ &= \mathcal{L}\left(-1 - t + e^t\right) = f(t). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{1}{s^2\left(s^2-1\right)}+\frac{1}{s\left(s^2-1\right)}\right)\right\} &= f(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)\\ &= \left(-t+e^{t-1}\right)\mathcal{U}(t-1)\end{aligned}$$

Sumando llegamos finalmente a que

$$x(t) = -t+\frac{e^t}{2}-\frac{e^{-t}}{2}+\mathcal{U}(t-1)\left(t-e^{t-1}\right)$$

o, lo que es lo mismo,

$$x(t) = \begin{cases} -t+\dfrac{e^t}{2}-\dfrac{e^{-t}}{2} & \text{si} \quad t<1 \\ \dfrac{e^t}{2}-\dfrac{e^{-t}}{2}-e^{t-1} & \text{si} \quad t\geq 1 \end{cases}$$