MAT 1640

Pauta Examen

15 Diciembre 2020

1A. Cuál es la solución del PVI siguiente?

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \cos(x), \quad y(0) = -1.$$

(a) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\big)$

(b) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x) + \mathrm{e}^{-x}\big)$

(c) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\sin(x) + \cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\big)$

(d) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x) - \mathrm{e}^{x}\big)$

(e) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x) + \mathrm{e}^{x}\big)$

(f) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\sin(x) + \cos(x) - \mathrm{e}^{x}\big)$

Solución. El factor integrante es

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x},$$

y la multiplicación por $\rho(x)$ da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x}\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) &\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y\,\mathrm{e}^{-x}\big) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x} = \int \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C \quad \text{(por partes)} \\
&\Leftrightarrow y(x) = \tfrac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C\,\mathrm{e}^{x}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición inicial $y(0) = -1$ da $-1 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$, de modo que

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x) - \mathrm{e}^{x}\big).$$

1B. Cuál es la solución del PVI siguiente?

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = \sin(x), \quad y(0) = 1.$$

(a) $y(x) = -\frac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x) - 6\,\mathrm{e}^{-2x}\big)$

(b) $y(x) = -\frac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x) + 6\,\mathrm{e}^{-2x}\big)$

(c) $y(x) = -\frac{1}{5}\big(2\sin(x) - \cos(x) - 6\,\mathrm{e}^{-2x}\big)$

(d) $y(x) = -\frac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x) - 6\,\mathrm{e}^{2x}\big)$

(e) $y(x) = -\frac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x) + 6\,\mathrm{e}^{2x}\big)$

(f) $y(x) = -\frac{1}{5}\big(2\sin(x) - \cos(x) - 6\,\mathrm{e}^{2x}\big)$

Solución. El factor integrante es

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int(-2)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x},$$

y la multiplicación por $\rho(x)$ da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2x}\,\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}\sin(x) &\Leftrightarrow \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y\,\mathrm{e}^{-2x}\big) = \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-2x} = \int \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow y\,\mathrm{e}^{-2x} = -\tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-2x}\big(2\sin(x)+\cos(x)\big) + C \quad \text{(por partes)}\\
&\Leftrightarrow y(x) = -\tfrac{1}{5}\big(2\sin(x)+\cos(x)\big) + C\,\mathrm{e}^{2x}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición inicial $y(0) = 1$ da $1 = -\frac{1}{5} + C \Rightarrow C = \frac{6}{5}$, de modo que

$$y(x) = -\tfrac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x) - 6\,\mathrm{e}^{2x}\big).$$

2A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(1) El PVI $y' = x(y-1)^{2/3}$, $y(1) = 0$, tiene una única solución definida en un intervalo en torno de $x = 1$.

(2) La solución del PVI $\frac{dy}{dx} = y^2$, $y(0) = 1$, está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) Si y_1, y_2 son soluciones reales, linealmente independientes de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ en $\mathbb{R}$, donde $a(x), b(x)$ son reales y continuas en $\mathbb{R}$, entonces el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(x)$ toma valores solo positivos, o solo negativos en $\mathbb{R}$.

(4) Las columnas de $E(t) := \mathrm{e}^{tA}$, donde A es una matriz $n \times n$, son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

(a) (1), (3) y (4)

(b) (2) y (4)

(c) (1), (2) y (4)

(d) (2) y (3)

(e) (1) y (2)

Solución. (1) es cierta. Notamos que $f(x,y) = x(y-1)^{2/3}$ y $\partial_y f(x,y) = (2/3)x(y-1)^{-1/3}$ son continuas cerca del dato inicial $(x_0, y_0) = (1, 0)$, entonces el Teorema de Existencia y Unicidad implica que el PVI tiene una única solución definida en torno de $x_0 = 1$.

(2) es falsa. Utilizando separación de variables, obtenemos

$$\int \tfrac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad y^{-1} = -x + C.$$

Poniendo la condición inicial $y(0) = 1$, obtenemos $C = 1$, así que la solución del PVI es $y(x) = 1/(1-x)$, que está definida en $(-\infty, 1)$.

(3) es cierta. Como soluciones y_1, y_2 de una ecuación de segundo orden son dos veces diferenciables en $\mathbb{R}$, entonces son continuamente diferenciables. Así que $W_{y_1,y_2} = y_1y_2' - y_2y_1'$ es continuo en $\mathbb{R}$. Además, como y_1, y_2 son soluciones LI en $\mathbb{R}$, el teorema visto en clases nos dice que $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, la función contunua $W_{y_1,y_2}(x)$ en $\mathbb{R}$ toma valores solo positivos, o solo negativos.

(4) es cierta. Dado que $E'(t) = AE$, las columnas de $E(t)$ son soluciones del sistema lineal homogéneo $\vec{x}' = A\vec{x}$. Y como $E(0) = I$, estas soluciones son LI en $t = 0$, implicando que son LI en todo $\mathbb{R}$.

2B. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(1) El PVI $y' = x(y-1)^{2/3}$, $y(0) = 1$, tiene una única solución definida en un intervalo en torno de $x = 0$.

(2) La solución del PVI $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$, $y(0) = 1$, está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) Si y_1, y_2 son soluciones de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ en $\mathbb{R}$, donde $a(x), b(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$, y el Wronskiano $W_{y_1,y_2}(1) = 0$, entonces existe un par de números (c_1, c_2) no trivial, tales que $c_1 y_1(x) = c_2 y_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Las columnas de $E(t) := \mathrm{e}^{tN}$, donde N es una matriz $n \times n$ nilpotente, son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$.

(a) (2) y (3)

(b) (2), (3) y (4)

(c) (1), (2) y (4)

(d) (1) y (2)

(e) (1) y (3)

Solución. (1) es falsa. Inmediatamente vemos que $y_1(x) \equiv 1$ es una solución del PVI. Otra podemos encontrar, separando variables:

$$\int (y-1)^{-2/3}\, dy = \int x\, dx \quad \Leftrightarrow \quad 3(y-1)^{1/3} = \tfrac{1}{2}x^2 + C.$$

Poniendo la conidición inicial $y(0) = 1$, encontramos $C = 0$ y la solución $y_2(x) = 1 + x^6/6^3$.

(2) es cierta. La solución del PVI es precisamente la solución de equilibrio $y(x) \equiv 1$.

(3) es cierta. Por el teorema visto en clases, si $W_{y_1,y_2}(1) = 0$, entonces las soluciones y_1, y_2 son linealmente dependientes. Luego, existen números c_1 y $-c_2$, tales que

$$c_1 y_1(x) + (-c_2) y_2(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 y_1(x) \equiv c_2 y_2(x).$$

(4) es falsa. Dado que $E'(t) = NE$, las columnas de $E(t)$ son soluciones del sistema lineal homogéneo $\vec{x}' = N\vec{x}$. Y como $E(0) = I$, estas soluciones son LI en $t = 0$, implicando que son LI en todo $\mathbb{R}$.

3A. Se aplica una fuerza horizontal constante $F = +10\,\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$ sobre un móvil de masa $m = 2\,\mathrm{kg}$ ubicado en la recta real. Dado que el móvil tiene posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = -10$ en el tiempo $t = 0$, calcular en cuanto tiempo el móvil llega a 100 metros de su posición inicial.

(a) $t = 2 + \sqrt{11}$ segundos

(b) $t = 2 + 2\sqrt{11}$ segundos

(c) $t = 2 + \sqrt{21}$ segundos

(d) $t = 2 + 2\sqrt{21}$ segundos

Solución. Sea $x(t)$ la posición del móvil en tiempo t. La ley de Newton $F = mx''(t)$ da en nuestro caso

$$10 = 2x''(t) \;\Leftrightarrow\; x''(t) = 5 \;\Leftrightarrow\; x'(t) = 5t + v_0 \;\Leftrightarrow\; x(t) = \tfrac{5}{2}t^2 + v_0 t + x_0.$$

Como $x_0 = 0$ y $v_0 = -10$, obtenemos $x(t) = \frac{5}{2}t^2 - 10t$. Entonces, para llegar a 100 metros se tiene

$$\tfrac{5}{2}t^2 - 10t = 100 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 4t = 40 \;\Leftrightarrow\; (t-2)^2 = 44 \;\Rightarrow\; t = 2 + 2\sqrt{11} \text{ segundos.}$$

3B. Se aplica una fuerza horizontal constante $F = +20\,\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$ sobre un móvil de masa $m = 2\,\mathrm{kg}$ ubicado en la recta real. Dado que el móvil tiene posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = -10$ en el tiempo $t = 0$, calcular en cuanto tiempo el móvil llega a 100 metros de su posición inicial.

(a) $t = 1 + \sqrt{11}$ segundos

(b) $t = 2 + \sqrt{11}$ segundos

(c) $t = 1 + \sqrt{21}$ segundos

(d) $t = 2 + \sqrt{21}$ segundos

Solución. Sea $x(t)$ la posición del móvil en tiempo t. La ley de Newton $F = mx''(t)$ da en nuestro caso

$$20 = 2x''(t) \;\Leftrightarrow\; x''(t) = 10 \;\Leftrightarrow\; x'(t) = 10t + v_0 \;\Leftrightarrow\; x(t) = 5t^2 + v_0 t + x_0.$$

Como $x_0 = 0$ y $v_0 = -10$, obtenemos $x(t) = 5t^2 - 10t$. Entonces, para llegar a 100 metros se tiene

$$5t^2 - 10t = 100 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 2t = 20 \;\Leftrightarrow\; (t-1)^2 = 21 \;\Rightarrow\; t = 1 + \sqrt{21} \text{ segundos.}$$

4A. La solución $x(t)$ del PVI

$$x' + x/t = tx^2, \quad x(1) = -1,$$

tiene valor $x(2)$ igual a:

(a) $-\frac{1}{12}$

(b) $-\frac{1}{6}$

(c) $-\frac{1}{2}$

(d) $-\frac{1}{4}$

Solución. La ecuación es de tipo Bernoulli con $n = 2$. La solución que buscamos es distinta de 0, así que podemos definir el cambio de variable $v = x^{1-2} = x^{-1}$. Reemplazando $x = v^{-1}$ en la ecuación, llegamos a la ecuación lineal para v

$$v' - v/t = -t,$$

cual tiene solución general

$$v(t) = \mathrm{e}^{\ln|t|} \int (-t)\,\mathrm{e}^{-\ln|t|}\,\mathrm{d}t = -|t| \int \tfrac{t}{|t|}\,\mathrm{d}t = -t(t + C) = -t^2 - Ct.$$

Entonces, $x(t) = (v(t))^{-1} = -(t^2 + Ct)^{-1}$ y la constante C que produce la solución del PVI específico es $C = 0$. Concluimos que $x(2) = -(2^2)^{-1} = -1/4$.

4B. La solución $x(t)$ del PVI

$$x' + 3x/t = tx^2, \quad x(1) = -1,$$

tiene valor $x(2)$ igual a:

(a) $-\frac{1}{4}$

(b) $-\frac{1}{6}$

(c) $-\frac{1}{2}$

(d) $-\frac{1}{12}$

Solución. La ecuación es de tipo Bernoulli con $n = 2$. La solución que buscamos es distinta de 0, así que podemos definir el cambio de variable $v = x^{1-2} = x^{-1}$. Reemplazando $x = v^{-1}$ en la ecuación, llegamos a la ecuación lineal para v

$$v' - 3v/t = -t$$

cual tiene solución general

$$v(t) = \mathrm{e}^{3\ln|t|}\int(-t)\,\mathrm{e}^{-3\ln|t|}\,\mathrm{d}t = -|t|^3\int\tfrac{t}{|t|^3}\,\mathrm{d}t = -t^3\int t^{-2}\,dt = t^3(t^{-1}+C) = t^2 + Ct^3.$$

Entonces, $x(t) = (v(t))^{-1} = (t^2 + Ct^3)^{-1}$ y la constante C que produce la solución del PVI específico es $C = -2$. Concluimos que $x(2) = (2^2 - 2\cdot 2^3)^{-1} = -1/12$.

5A. Sea la ecuación

$$y'' + y' + y = 0 \quad \text{con la condición} \quad \lim_{x\to\infty}\left|\mathrm{e}^{x/2}\,y(x) - \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right| = 0.$$

Entonces:

(a) $y(2) = \frac{1}{\mathrm{e}}\cos(\sqrt{3})$

(b) $y(2) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}\cos(\sqrt{3})$

(c) $y(2) = \frac{1}{\mathrm{e}}\cos(2\sqrt{3})$

(d) $y(2) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}\cos(2\sqrt{3})$

Solución. La ecuación caracteristica es

$$r^2 + r + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} = 0 \;\Rightarrow\; r = \tfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Luego, la solución general es

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ constantes},$$

y la condición da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left|\mathrm{e}^{x/2}\,y(x) - \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right| = 0 \;&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}\left|c_1\,\mathrm{e}^{\frac{ix\sqrt{3}}{2}} + c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{ix\sqrt{3}}{2}} - \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right| = 0\\
&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}\left|(c_1+c_2)\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i(c_1-c_2)\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right| = 0\\
&\Leftrightarrow\; c_1 = c_2 = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x},$$

y

$$y(2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(-1+i\sqrt{3})} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(1+i\sqrt{3})} = \tfrac{1}{2\,\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^{i\sqrt{3}} + \mathrm{e}^{-i\sqrt{3}}\right) = \tfrac{1}{\mathrm{e}}\cos(\sqrt{3}).$$

5B. Sea la ecuación

$$y'' + y' + 2y = 0 \quad \text{con la condición} \quad \lim_{x\to\infty}\left|\mathrm{e}^{x/2}\,y(x) - \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right| = 0.$$

Entonces:

(a) $y(2) = \frac{1}{\mathrm{e}}\cos(\sqrt{7})$

(b) $y(2) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}\cos(\sqrt{7})$

(c) $y(2) = \frac{1}{\mathrm{e}} \cos(2\sqrt{7})$

(d) $y(2) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \cos(2\sqrt{7})$

Solución. La ecuación caracteristica es

$$r^2 + r + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4} = 0 \;\Rightarrow\; r = \tfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Luego, la solución general es

$$y(x) = c_1\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)x} + c_2\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)x} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ constantes},$$

y la condición da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left| \mathrm{e}^{x/2}\, y(x) - \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right| = 0 \;&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty} \left| c_1\, \mathrm{e}^{\frac{ix\sqrt{7}}{2}} + c_2\, \mathrm{e}^{-\frac{ix\sqrt{7}}{2}} - \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty} \left| (c_1 + c_2)\cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right) + i(c_1 - c_2)\sin\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right) - \cos\left(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow\; c_1 = c_2 = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)x} + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)x},$$

y

$$y(2) = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{(-1+i\sqrt{7})} + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-(1+i\sqrt{7})} = \tfrac{1}{2\,\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^{i\sqrt{7}} + \mathrm{e}^{-i\sqrt{7}}\right) = \tfrac{1}{\mathrm{e}}\cos(\sqrt{7}).$$

6A. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Dado que la EDO

$$x'' + ax' + bx = \mathrm{e}^{-t}$$

tiene una solución de la forma $x(t) = At^2\, \mathrm{e}^{-t} + B\, \mathrm{e}^{-t}$ para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$ no nulos, se tiene:

(a) $a + b = 3$

(b) $a + b = -1$

(c) $a + b = 2$

(d) $a + b = 1$

Solución. Sean λ_1, λ_2 las raíces de la ecuación característica asociada a la parte homogénea de la ecuacion

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

El método de coeficientes indeterminados implica que una solución particular de la ecuación tiene la forma

$$x_p(t) = At^m\, \mathrm{e}^{-t}, \quad A \neq 0,$$

donde m es la multiplicidad de -1 como raíz de la ecuación característica (si -1 no es raíz, se tiene $m = 0$). Luego, la solución general tiene la forma

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \begin{cases} At^m\, \mathrm{e}^{-t} + c_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ At^m\, \mathrm{e}^{-t} + c_1\, \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t\, \mathrm{e}^{\lambda t} & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

con c_1, c_2 constantes. Dado que $x(t) = At^2\, \mathrm{e}^{-t} + B\, \mathrm{e}^{-t}$ es solución de la ecuación con $A \neq 0 \neq B$, debemos tener $m = 2$, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Entonces, la ecuación característica es $0 = (\lambda - (-1))^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, de donde concluimos que $a = 2, b = 1$, y $a + b = 3$.

6B. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Dado que la EDO

$$x'' + ax' + bx = \mathrm{e}^{t}$$

tiene una solución de la forma $x(t) = At^2\, \mathrm{e}^{t} + B\, \mathrm{e}^{t}$ para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$ no nulos, se tiene:

(a) $a+b=3$

(b) $a+b=-1$

(c) $a+b=2$

(d) $a+b=1$

Solución. Sean λ_1, λ_2 las raíces de la ecuación característica asociada a la parte homogénea de la ecuacion

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

El método de coeficientes indeterminados implica que una solución particular de la ecuación dada tiene la forma

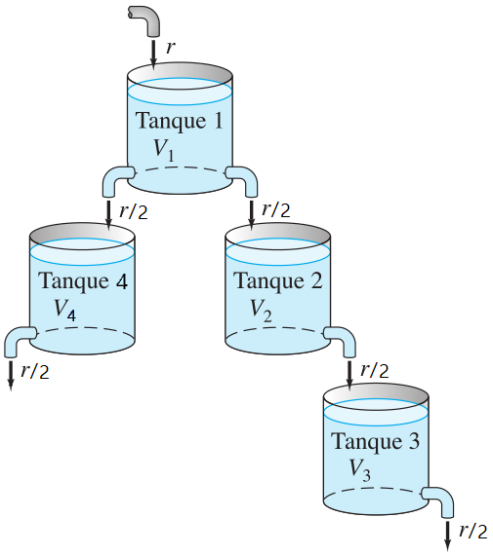
$$x_p(t) = At^m \, \mathrm{e}^t, \quad A \neq 0,$$

donde m es la multiplicidad de 1 como raíz de la ecuación característica (si 1 no es raíz, se tiene $m=0$). Luego, la solución general tiene la forma

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \begin{cases} At^m \, \mathrm{e}^t + c_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ At^m \, \mathrm{e}^t + c_1 \, \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t \, \mathrm{e}^{\lambda t} & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

con c_1, c_2 constantes. Dado que $x(t) = At^2 \, \mathrm{e}^t + B \, \mathrm{e}^t$ es una solución de la ecuación con $A \neq 0 \neq B$, debemos tener $m=2$, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Entonces, la ecuación característica es $0 = (\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, de donde concluimos que $a=-2, b=1$, y $a+b=-1$.

7A. Hay cuatro tanques de salmuera de volumenes V_1, V_2, V_3, V_4, con los valores V_1, V_2, V_3, V_4, $V_1/2$, $V_2/2$, $V_3/2$, $V_4/2$ todos distintos. Agua fresca fluye hacia el tanque 1. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hacia los tanques 2 y 4. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 2 hacia el tanque 3. Finalmente, salmuera mezclada sale desde los tanques 3 y 4.



Si $x_i(t)$ es la cantidad de sal en el tanque i en el tiempo t (con $i=1,2,3,4$) y si las razones de flujo valen r y $r/2$ como en la figura, entonces $\vec{x}(t) := \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)^{\mathsf{T}}$ es de la forma:

(a) $\vec{x}(t) = c_1\vec{v}_1 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{V_1}} + c_2\vec{v}_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_2}} + c_3\vec{v}_3 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_3}} + c_4\vec{v}_4 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_4}}$ para ciertas constantes c_i y vectores $\vec{v}_i$

(b) $\vec{x}(t) = c_1\vec{v}_1 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_1}} + c_2\vec{v}_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_2}} + c_3\vec{v}_3 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_3}} + c_4\vec{v}_4 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_4}}$ para ciertas constantes c_i y vectores $\vec{v}_i$

(c) $\vec{x}(t) = c_1\vec{v}_1 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_1}} + c_2\vec{v}_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{V_2}} + c_3\vec{v}_3 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{V_3}} + c_4\vec{v}_4 \, \mathrm{e}^{-\frac{tr}{V_4}}$ para ciertas constantes c_i y vectores $\vec{v}_i$

(d) $\vec{x}(t) = c_1\vec{v}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_1}} + c_2\vec{v}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_2}} + c_3\vec{v}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_3}} + c_4\vec{v}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{V_4}}$ para ciertas constantes c_i y vectores $\vec{v}_i$

Solución. Ya sabemos (por ejemplo de la I2) que

$$\vec{x}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2V_2} & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & 0 & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x}.$$

Entonces,

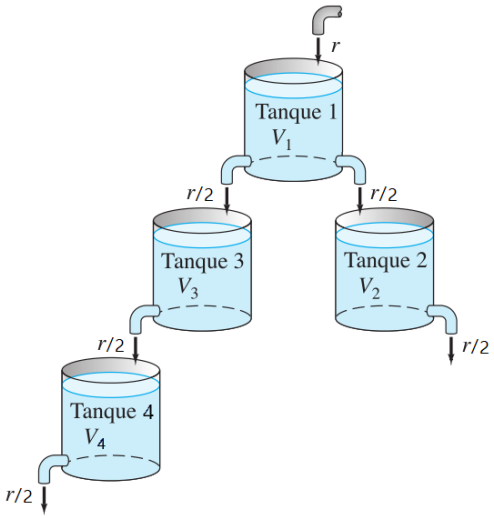
$$\det(A - \lambda I) = \left(\tfrac{r}{V_1} + \lambda\right)\left(\tfrac{r}{2V_2} + \lambda\right)\left(\tfrac{r}{2V_3} + \lambda\right)\left(\tfrac{r}{2V_4} + \lambda\right),$$

y los valores propios son $\lambda = -\frac{r}{V_1}, -\frac{r}{2V_2}, -\frac{r}{2V_3}, -\frac{r}{2V_4}$ (todos distintos dado la hipótesis sobre los V_i). De ello, inferimos que la solución es de la forma

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{v}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{V_1}} + c_2\vec{v}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_2}} + c_3\vec{v}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_3}} + c_4\vec{v}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{tr}{2V_4}}$$

para ciertas constantes c_i y vectores $\vec{v}_i$.

7B. Hay cuatro tanques de salmuera de volumenes V_1, V_2, V_3, V_4, con los valores V_1, V_2, V_3, V_4, $V_1/2$, $V_2/2$, $V_3/2$, $V_4/2$ todos distintos. Agua fresca fluye hacia el tanque 1. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hacia los tanques 2 y 3. Salmuera mezclada fluye desde el tanque 3 hacia el tanque 4. Finalmente, salmuera mezclada sale desde los tanques 2 y 4.



Si $x_i(t)$ es la cantidad de sal en el tanque i en el tiempo t (con $i = 1, 2, 3, 4$) y si las razones de flujo valen r y $r/2$ como en la figura, entonces $\vec{x}(t) := \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)^{\mathsf{T}}$ es de la forma:

(a) $\vec{x}(t) = C_1\vec{w}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{V_1}t} + C_2\vec{w}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_2}t} + C_3\vec{w}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_3}t} + C_4\vec{w}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_4}t}$ para ciertas constantes C_i y vectores $\vec{w}_i$

(b) $\vec{x}(t) = C_1\vec{w}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_1}t} + C_2\vec{w}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_2}t} + C_3\vec{w}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_3}t} + C_4\vec{w}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_4}t}$ para ciertas constantes C_i y vectores $\vec{w}_i$

(c) $\vec{x}(t) = C_1\vec{w}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_1}t} + C_2\vec{w}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{V_2}t} + C_3\vec{w}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{V_3}t} + C_4\vec{w}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{V_4}t}$ para ciertas constantes C_i y vectores $\vec{w}_i$

(d) $\vec{x}(t) = C_1\vec{w}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_1}t} + C_2\vec{w}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_2}t} + C_3\vec{w}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_3}t} + C_4\vec{w}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{V_4}t}$ para ciertas constantes C_i y vectores $\vec{w}_i$

Solución. Ya sabemos (por ejemplo de la I2) que

$$\vec{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & -\frac{r}{2V_2} & 0 & 0 \\ \frac{r}{2V_1} & 0 & -\frac{r}{2V_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2V_3} & -\frac{r}{2V_4} \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x}.$$

Entonces,

$$\det(A - \lambda I) = \left(\tfrac{r}{V_1} + \lambda\right)\left(\tfrac{r}{2V_2} + \lambda\right)\left(\tfrac{r}{2V_3} + \lambda\right)\left(\tfrac{r}{2V_4} + \lambda\right),$$

y los valores propios son $\lambda = -\frac{r}{V_1}, -\frac{r}{2V_2}, -\frac{r}{2V_3}, -\frac{r}{2V_4}$ (todos distintos dado la hipótesis sobre los V_i). De ello, inferimos que la solución es de la forma

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{w}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{V_1}t} + C_2\vec{w}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_2}t} + C_3\vec{w}_3\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_3}t} + C_4\vec{w}_4\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2V_4}t}$$

para ciertas constantes C_i y vectores $\vec{w}_i$.

8A. Sea el PVI

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta que $A = I + N$, donde I es la matriz identidad y $N^3 = 0$, la solución del PVI es:

(a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t+2t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t+4t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 4t+4t^2 \\ 1+4t \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 4t+2t^2 \\ 1+4t \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución. Ya que I y N conmutan y $N^3 = 0$, tenemos

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t(I+N)} = \mathrm{e}^{tI}\,\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^t\left(I + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2\right).$$

Tomando en cuenta que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtenemos

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^t\left(I + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2\right) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, la solución del PVI es

$$\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t+2t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8B. Considere el PVI

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta que $A = -I + N$, donde I es la matriz identidad y $N^3 = 0$, la solución del PVI es:

(a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 5t+2t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 5t+4t^2 \\ 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 4t+4t^2 \\ 1+4t \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 4t+2t^2 \\ 1+4t \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución. Ya que $-I$ y N conmutan y $N^3 = 0$, tenemos

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t(-I+N)} = \mathrm{e}^{t(-I)}\,\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{-t}\left(I + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2\right).$$

Tomando en cuenta que $N^2 = \begin{pmatrix} 0&1&3\\0&0&4\\0&0&0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0&0&4\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, obtenemos

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{-t}\left(I + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2\right) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1&t&3t+2t^2\\0&1&4t\\0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, la solución del PVI es

$$\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 4t+2t^2\\1+4t\\1 \end{pmatrix}.$$

9A. Cuál es la solución del PVI siguiente:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2&3\\0&2 \end{pmatrix}\vec{x} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 6t-1\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 2\\-1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 6t-1\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\\-1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 4t-1\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 2\\-1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 6t-1\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 2\\-1 \end{pmatrix}$

Solución. Las matrices $N = \begin{pmatrix} 0&3\\0&0 \end{pmatrix}$ y I conmutan, y $N^k = 0$ si $k \geq 2$. Entonces,

$$\mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 2&3\\0&2 \end{pmatrix}} = \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{2t}(I + tN) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1&3t\\0&1 \end{pmatrix}$$

y la solución del PVI es

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 2&3\\0&2 \end{pmatrix}}\vec{x}(0) + \mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 2&3\\0&2 \end{pmatrix}}\int_0^t \mathrm{e}^{-s\begin{pmatrix} 2&3\\0&2 \end{pmatrix}}\mathrm{e}^s\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1&3t\\0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1&3t\\0&1 \end{pmatrix}\int_0^t \mathrm{e}^{-2s}\begin{pmatrix} 1&-3s\\0&1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^s\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1+3t\\1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1&3t\\0&1 \end{pmatrix}\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\begin{pmatrix} 1-3s\\1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1+3t\\1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1&3t\\0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t}+3t\,\mathrm{e}^{-t}-2\\1-\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1+3t\\1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t}-2+3t\\1-\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 6t-1\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 2\\-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

9B. Cuál es la solución del PVI siguiente:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2&5\\0&2 \end{pmatrix}\vec{x} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 10t-3\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 4\\-1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 10t-3\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 4\\-1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 6t-3\\2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 4\\-1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 10t-3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución. Las matrices $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y I conmutan, y $N^k = 0$ si $k \geq 2$. Entonces,

$$\mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{2t}(I + tN) = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

y la solución del PVI es

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)}\vec{x}(0) + \mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \int_0^t \mathrm{e}^{-s\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)}\,\mathrm{e}^s \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \int_0^t \mathrm{e}^{-2s}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -5s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{e}^s \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1+5t \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\left(\begin{smallmatrix} 1-5s \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1+5t \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4\,\mathrm{e}^{-t} + 5t\,\mathrm{e}^{-t} - 4 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t} \end{smallmatrix}\right) \\
&= \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1+5t \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 4\,\mathrm{e}^{-t} - 4 + 5t \\ 1 - \mathrm{e}^{-t} \end{smallmatrix}\right) \\
&= \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 10t-3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^t \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

10A. Sea $(x(t), y(t))$ la solución del PVI:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

Para qué valor de t, $y(t) = 0$?

(a) $t = 1/2$

(b) $t = 1$

(c) $t = 1/4$

(d) no existe tal t.

Solución. Sea $\vec{x} := (x, y)^{\mathsf{T}}$. El sistema es $\vec{x} = A\vec{x}$, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La ecuación característica es $\lambda^2 - (\mathrm{Tr}A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. El espacio propio de A asociado a $\lambda = 2$ es el espacio nulo de

$$A - 2I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

así que es generado por el vector propio $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Para encontrar un vector propio generalizado $\vec{w}$ asociado a $\lambda = 2$ resolvemos

$$(A - 2I)\vec{w} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Una solución es $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Luego, la solución general del sistema es

$$\vec{x} = c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^{2t} + c_2(t\vec{v} + \vec{w})\,\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} c_1 + c_2 t \\ -c_1 - c_2 t + c_2 \end{smallmatrix}\right).$$

Para determinar la solución que satisface $\vec{x}(0) = (1, 1)^T$, las constantes c_1, c_2 deben cumplir

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = 2.$$

Luego, la solución del PVI es $\left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{smallmatrix} 1+2t \\ 1-2t \end{smallmatrix}\right)$ y vemos que $y(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ t = 1/2$.

10B. Sea $(x(t), y(t))$ la solución del PVI:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

Para qué valor de t, $y(t) = 0$?

(a) $t = 1/4$

(b) $t = 1$

(c) $t = 1/2$

(d) no existe tal t.

Solución. Sea $\vec{x} := (x, y)^{\mathsf{T}}$. El sistema es $\vec{x} = A\vec{x}$, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. La ecuación característica de A es $\lambda^2 - (\mathrm{Tr}A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. El espacio propio de A, asociado a $\lambda = 1$ es el espacio nulo de

$$A - I = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

así que es generado por el vector propio $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Para encontrar un vector propio generalizado $\vec{w}$, asociado a $\lambda = 1$, resolvemos

$$(A - I)\vec{w} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Una solución es $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$. Luego, la solución general del sistema es

$$\vec{x} = c_1\vec{v}\,\mathrm{e}^t + c_2(t\vec{v} + \vec{w})\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \left(\begin{smallmatrix} c_1 + c_2 t \\ -c_1 - c_2 t + c_2/2 \end{smallmatrix}\right).$$

Para determinar la solución que satisface $\vec{x}(0) = (1, 1)^T$, las constantes c_1, c_2 deben cumplir

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2/2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = 4.$$

Luego, la solución del PVI es $\left(\begin{smallmatrix} x(0) \\ y(0) \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{e}^t \left(\begin{smallmatrix} 1+4t \\ 1-4t \end{smallmatrix}\right)$ y vemos que $y(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ t = 1/4$.

11A. Sea la ecuación

$$(y')^2 = 3y^2 - y^4 - \tfrac{5}{2} \qquad (y \text{ función real}).$$

Entonces:

(a) la ecuación tiene una infinidad de soluciones

(b) la ecuación tiene un número finito de soluciones

(c) la ecuación tiene una única solución definida en un intervalo abierto

(d) la ecuación no tiene solución

Solución. Tenemos

$$(y')^2 = -\big(y^4 - 3y^2 + \tfrac{5}{2}\big) = -\big(\big(y^2 - \tfrac{3}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4}\big) \ \Rightarrow \ (y')^2 \leq -\tfrac{1}{4},$$

lo que es una contradicción. Entonces la ecuación no puede tener solución.

11B. Sea la ecuación

$$(y')^2 = y^2 - y^4 - \tfrac{1}{3} \qquad (y \text{ función real}).$$

Entonces:

(a) la ecuación tiene una infinidad de soluciones

(b) la ecuación tiene un número finito de soluciones

(c) la ecuación tiene una única solución definida en un intervalo abierto

(d) la ecuación no tiene solución

Solución. Tenemos

$$(y')^2 = -\left(y^4 - y^2 + \tfrac{1}{3}\right) = -\left(\left(y^2 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{12}\right) \;\Rightarrow\; (y')^2 \leq -\tfrac{1}{12},$$

lo que es una contradicción. Entonces la ecuación no puede tener solución.

12A. El sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = 3x - y - x^2 \\ y' = x - y \end{cases}$$

tiene

(a) un punto silla y un punto espiral estable

(b) un punto silla y un punto espiral inestable

(c) un nodo estable y un punto espiral inestable

(d) un nodo inestable y un punto espiral estable

(e) solo un punto silla

(f) solo un punto espiral

Solución. Los puntos críticos (x^*, y^*) del sistema satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = 3x - y - x^2 \\ 0 = x - y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0 = 2x - x^2 \\ x = y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (x^*, y^*) = (0,0) \text{ o } (2,2).$$

Para clasificar los puntos críticos, calculamos el Jacobiano $J(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 3-2x & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En el punto crítico $(0,0)$, el Jacobiano $J(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene valores propios que satisfacen la ecuación característica

$$0 = \lambda^2 - (\operatorname{Tr} J)\lambda + \det J = \lambda^2 - 2\lambda - 2 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2,$$

de donde concluimos que $(0,0)$ es un punto silla. En el punto crítico $(2,2)$, el Jacobiano $J(2,2) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene valores propios que satisfacen la ecuación característica

$$0 = \lambda^2 - (\operatorname{Tr} J)\lambda + \det J = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i,$$

lo que implica que $(2,2)$ es un punto espiral estable ($\operatorname{Re}\lambda < 0$).

12B. El sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = -3x + y + 2x^2 \\ y' = -x + y \end{cases}$$

tiene

(a) un punto silla y un punto espiral estable

(b) un punto silla y un punto espiral inestable

(c) un nodo estable y un punto espiral inestable

(d) un nodo inestable y un punto espiral estable

(e) solo un punto silla

(f) solo un punto espiral

Solución. Los puntos críticos (x^*, y^*) del sistema satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = -3x + y + 2x^2 \\ 0 = -x + y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = -2x + 2x^2 \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x^*, y^*) = (0,0) \text{ o } (1,1).$$

Para clasificar los puntos críticos, calculamos el Jacobiano $J(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} -3+4x & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En el punto crítico $(0,0)$, el Jacobiano $J(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene valores propios que satisfacen la ecuación característica

$$0 = \lambda^2 - (\text{Tr } J)\lambda + \det J = \lambda^2 + 2\lambda - 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2,$$

de donde concluimos que $(0,0)$ es un punto silla. En el punto crítico $(1,1)$, el Jacobiano $J(1,1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene valores propios que satisfacen la ecuación característica

$$0 = \lambda^2 - (\text{Tr } J)\lambda + \det J = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

lo que implica que $(1,1)$ es un punto espiral inestable ($\text{Re } \lambda > 0$).