Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Examen

1. Resuelva el siguiente PVI si se sabe que $y_c(x) = c_1x + c_2(1+x^2)$ es la solución complementaria:

$$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

Verifique además que la solución encontrada satisface: $y(1) = 2/3, \quad y'(1) = 2/3$.

Solución. Para utilizar el método de variación de parámetros reescribimos la ecuación como:

$$y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = x^2 - 1$$

Luego, usamos la fórmula

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$$

donde $f(x) = x^2 - 1$ y $W(x)$ es el wronskiano de la soluciones (l.i.) a la ecuación homogénea, es decir,

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 + x^2.$$

El wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1+x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - (1+x^2) = x^2 - 1.$$

Luego, la solución particular es

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -x\int (1+x^2)dx + (1+x^2)\int x dx \\ &= -x(x + \frac{x^3}{3}) + (1+x^2)\frac{x^2}{2} \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} \end{aligned}$$

La solución general queda

$$y(x) = c_1x + c_2(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6},$$

cuya derivada es

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x - x + \frac{2}{3}x^3.$$

Imponemos las condiciones iniciales para resolver el PVI:

$$y(0) = c_2 = 1; \quad y'(0) = c_1 = -1,$$

por lo tanto, la solución al PVI es

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}.$$

Verificamos que satisface:

$$y(1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}; \quad y'(1) = -1 + 1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

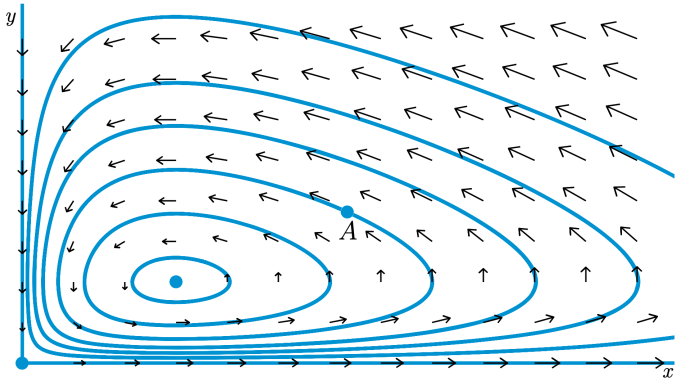
Asignación de Puntaje

- Asignar **(1 ptos)** por plantear la formula de variación de parámetros.
- Asignar **(1 ptos)** por identificar la función $f(x) = x^2 - 1$ (que resulta de dividir la ecuación por $x^2 - 1$).
- Asignar **(0.5 pto)** por calcular correctamente cada una de las integrales involucradas. Total **(1 ptos)**
- Asignar **(1 pto)** obtener la solución particular correcta.
- Asignar **(0.5 pto)** por imponer las condiciones iniciales. **Este puntaje se asignará independiente si se obtuvo una solución particular incorrecta.**
- Asignar **(0.5 pto)** por determinar las constantes c_1 y c_2 adecuadas y escribir la solución PVI. **Este puntaje se asignará independiente si se obtuvo una solución particular incorrecta.**
- Asignar **(1 pto)** por evaluar en 1 y verificar que la solución satisface: $y(1) = 2/3, \quad y'(1) = 2/3$

2. *a*) Calcule los puntos críticos del siguiente sistema casi-lineal y clasifíquelos indicando el tipo y su estabilidad:

$$x' = x - \frac{1}{2}xy, \quad y' = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}xy.$$

Puede guiarse del plane de fase que se muestra a continuación, sin embargo debe justificar su respuesta con cálculos y resultados vistos en clases.



b) Las ecuaciones anteriores modelan la dinámica poblacional de un sistema depredador-presa. Si $x(t)$ representa el tamaño de una población de conejos, mientras que $y(t)$ el tamaño de una población de zorros, explique brevemente lo que representa la trayectoria en el plano de fase asociada a las condiciones iniciales $(x(0), y(0))$ en el punto A.

Solución. (a) Identificamos primero los puntos críticos del sistema:

$$F(x,y) = x - \frac{1}{2}xy = x(1 - \frac{1}{2}y) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ o } \ y = 2$$

$$G(x,y) = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}xy = y(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ \text{ o } \ x = 3$$

Si $x = 0$, entonces escogiendo $y = 0$ se tiene que $F(0,0) = G(0,0) = 0$. Por otro lado, si $y = 2$, entonces escogiendo $x = 3$ se tiene que $F(3,2) = G(3,2) = 0$. Es decir, los puntos críticos son: $(0,0)$ y $(3,2)$.

Para clasificar los puntos críticos debemos linealizar el sistema en torno a ellos. Primer calculamos

$$\partial_x F(x,y) = 1 - \frac{1}{2}y; \quad \partial_y F(x,y) = -\frac{1}{2}x; \quad \partial_x G(x,y) = \frac{1}{4}y; \quad \partial_y F(x,y) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x.$$

El sistema linealizado en torno al $(0,0)$ es

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los valores propios asociados al sistema son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -3/4$. Concluimos a partir del teorema de clasificación de sistemas casi-lineales que $(0,0)$ corresponde a un punto crítico inestable de tupo punto silla.

El sistema linealizado en torno al $(3,2)$ es

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = i\sqrt{3}/2$ y $\lambda_2 = -i\sqrt{3}/2$. Concluimos a partir del teorema de clasificación de sistemas casi-lineales y del diagrama de fase que $(3, 2)$ corresponde a un punto crítico estable de tipo centro.

(b) La trayectoria corresponde a la evolución en el tiempo de las poblaciones de zorros y conejos. Al comenzar en el punto A, la población de zorros crece produciendose una disminución de la población de conejos, pero al haber pocos conejos, disminuye el número de zorros por falta de alimento. Al haber menos zorros, se produce un aumento en la población de conejos que consecuentemente genera un aumento de zorros (al haber más alimento). Esta dinámica se repite de manera cíclica.

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 pto)** por plantear cada una de las ecuaciones para encontrar puntos críticos. Total **(1 pto)**.
- Asignar **(0.5 ptos)** por identificar correctamente cada uno de los puntos críticos. Total **(1 pto)**.

El siguiente puntaje se asigna independientemente si hubo un error en el cálculo de los punto crítico.

- Asignar **(0.25 pto)** por calcular correctamente cada derivada parcial de F y G. Total **(1 pto)**.
- Asignar **(0.5 pto)** por obtener el sistema linealizado correcto en torno al primer punto crítico.
- Asignar **(0.5 pto)** por identificar los valores propios y clasificar correctamente el primer punto crítico.
- Asignar **(0.5 pto)** por obtener el sistema linealizado correcto en torno al segundo punto crítico.
- Asignar **(0.5 pto)** por identificar los valores propios y clasificar correctamente el segundo punto crítico.
- Asignar **(1 pto)** por responder la parte (b) y dar una interpretación satisfactoria de la trayectoria señalada.

3. Determine la solución general de la ecuación

$$x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) = 2t.$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es:

$$r^3 - 2r^2 + r = 0$$

que tiene por soluciones $r = 0$, con multiplicidad 1, y $r = 1$, con multiplicidad 2. De lo anterior, la solución general homogénea de nuestra ecuación diferencial es:

$$x_h(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t$$

Para determinar la solución particular podemos usar el método de coeficientes indeterminados, asumiendo que la solución particular es de la forma $x_p(t) = at + bt^2$. Remplazando esta solución tendremos:

$$-2 \cdot (2b) + (a + 2bt) = 2t$$

de donde se deduce que $b = 1$ y $a = 4$.

Finalmente, la solucón general de nuestra edo es:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 t e^t + 4t + t^2$$

Asignación de Puntaje

- Asignar **(1 pto)** por determinar la ecuación característica.
- Asignar **(0.5 ptos)** por determinar cada solución de la ecuación característica y su multiplicidad. Total **(1 pto)**.
- Asignar **(1 pto)** por determinar la solución general a la ecuación homogénea.
- Asignar **(1 pto)** por determinar la forma de la solución particular siguiendo el método de coeficientes indeterminados (regla 2).
- Asignar **(1 pto)** por calcular correctamente las constantes a y b de la solución particular.
- Asignar **(1 pto)** por escribir la solución general a la ecuación diferencial.

4. Usando transformada de Laplace, resuelva la ecuación

$$x'(t) + 4\int_0^t x(r)\,dr = \cos(2t)\big(H(t-\pi) - H(t-2\pi)\big), \quad \text{con} \quad x(0) = 0,$$

siendo $H = H(t)$ la función de Heaviside.

Nota. Si $f(t) = \cos(2t)$ entonces $(f * f)(t) = \dfrac{1}{4}(2t\cos(2t) + \sin(2t))$

Solución. Usando transformada de Laplace, la ecuación queda dada por

$$sX(s) + 4\frac{X(s)}{s} = (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})\frac{s}{s^2+4}$$

siendo $X(s) = \big(\mathcal{L}\,x(t)\big)(s)$. Despejando $X(s)$ de esta ecuación tendremos

$$X(s) = (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})\left(\frac{s}{s^2+4}\right)^2$$

Luego, aplicando transformada de Laplace inversa tendremos que

$$\begin{aligned} x(t) &= H(t-\pi)\left(\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right)(t-\pi) - H(t-2\pi)\left(\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right)(t-2\pi) \\ &= H(t-\pi)(\cos(2t) * \cos(2t))(t-\pi) - H(t-2\pi)(\cos(2t) * \cos(2t))(t-2\pi) \\ &= H(t-\pi)\frac{1}{4}(2(t-\pi)\cos(2t) + \sin(2t)) - H(t-2\pi)\frac{1}{4}(2(t-2\pi)\cos(2t) + \sin(2t)) \end{aligned}$$

Asignación de Puntaje

- Asignar **(0.5 pto)** por calcular correctemente la transformada de $x'(t)$ y usar la condición inicial.
- Asignar **(1 ptos)** identificar la convolución y calcular correctamente la transformada de $4\displaystyle\int_0^t x(r)\,dr$.
- Asignar **(0.5 pto)** por calcular correctamente la transformada del lado derecho de la ecuación.
- Asignar **(1 pto)** despejar $X(s)$.
- Asignar **(1 pto)** por aplicar la transformada inversa de Laplace a la expresión encontrada para $X(s)$ y utilizar la propiedad de traslación en t.
- Asignar **(0.5 pto)** por utilizar la la propiedad de la convolución sobre cada una de los términos (el asociado a $H(t-\pi)$ y $H(t-2\pi)$ respectivamente). Total **(1 pto)**.
- Asignar **(0.5 pto)** por utilizar la indiciación para cada una de los términos (el asociado a $H(t-\pi)$ y $H(t-2\pi)$ respectivamente). Total **(1 pto)**.