**Pontificia Universidad Católica de Chile**
**Facultad de Matemáticas**
**2 Semestre de 2016**

## MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
## Interrogación N° 3

1. Resuelva el sistema
$x' = x + 2z + e^t$
$y' = 2x + 2y$ con condición inicial $\overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$z' = 4x - z$

**Solución**

El sistema los podemos escribir como

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para encontra la solución general de la homogenea buscamos los valores propios de A.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(2-\lambda) - 8(2-\lambda) = (\lambda^2 - 9)(2-\lambda)$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -3$. Buscamos los vectores propios correspondientes.

Si $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $a = c = 0$ y $u_1 = (0,1,0)^T$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_1$.

Si $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $a = c,\ b = 2a$ y $u_2 = (1,2,1)^T$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_2$.

Por último, si $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $-2a = c,\ b = -\frac{2}{5}a$ y $u_1 = (5,-2,-10)^T$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_3$. Vemos que la solución general del sistema homogeneo asociado es

$$\overrightarrow{x} = C_1 e^{2t}(0,1,0)^T + C_2 e^{3t}(1,2,1)^T + C_3 e^{-3t}(5,-2,-10)^T$$

Sean $a, b$ y $c$ tales que $\overrightarrow{x}_p(t) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^t \\ ce^t \end{pmatrix}$ es una solución particular, entonces

$$\begin{pmatrix} ae^t \\ be^t \\ ce^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2c+1)e^t \\ (2a+2b)e^t \\ (4a-c)e^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{x}_{\text{p}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^t \\ \frac{1}{2}e^t \\ -\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$$

.

$$\overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 + 5C_3 - \frac{1}{4} \\ C_1 + 2C_2 - 2C_3 + \frac{1}{2} \\ C_2 - 10C_3 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La solución es $x(t) = e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^t, \quad y(t) = -\frac{12}{5}e^{2t} + 2e^{3t} - \frac{1}{10}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^t,$
$z(t) = e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$

**OTRA SOLUCIÖN**

El sistema lo podemos expresar como
$(D-1)x - 2z = e^t$
$-2x + (D-2)y = 0$
$-4x + (D+1)z = 0$

Por lo tanto $4(D-1)x - 8z = 4e^t$
$-4(D-1)x + (D^2-1)z = 0$
Sumando nos queda $(D^2-9)z = 4e^t$, por lo tanto $z_h(t) = C_1e^3t + C_2e^{-3t}$.
Si $z_p = ae^t$, $(D-9)z_h = ae^t - 9ae^t = 4e^t$ por lo tanto $z_p = -\frac{1}{2}e^t$ y $z(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$

Como $4x = (D+1)z$ se tiene que

$$x = \frac{1}{4}\left(3C_1e^3t - 3C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t + C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t\right) = C_1e^{3t} - \frac{1}{2}C_2e^{-3t} - \frac{1}{4}e^t$$

Por último, $(D-2)y = 2x = 2C_1e^{3t} - C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$
La solución $y_h$ de la homogenea asociada es $y_h = C_3e^{2t}$.
Si $y_p$ es de la forma $ae^{3t} + be^{-3t} + ce^t$, entonces

$$3ae^{3t} - 3be^{-3t} + ce^t - 2ae^{3t} - 2be^{-3t} - 2ce^t = ae^{3t} - 5be^{-3t} - ce^t = 2C_1e^{3t} - C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$$

entonces $y = C_3e^{2t} + 2C_1e^{3t} + \frac{1}{5}C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$.

Con la condición inicial $\overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t; \quad y = -\frac{12}{5}e^{2t} +$
$2e^{3t} - \frac{1}{10}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t; \quad z(t) = e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$

2. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre $e^{At}$

**Solución**

Buscamos los valoress propios, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = 1$, vemos que si $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = c = 0$, por lo tanto $\lambda_1$ es un valor propio degenerado y $u_1 = (1,0,0)^T$ es valor propio ordinario.

Buscamos $a, b, c$ tales que $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, vemos que $u_2 = (0, \frac{1}{3}, 0)^T$ es un vector propio generalizado de rango 2.

Para $\lambda_2$, vemos que si $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a = 13c, b = 3c$ por lo tanto $u_3 = (13,3,1)^T$ es un vector propio.

Por lo tanto

$x_1 = e^t u_1 = (e^t, 0, 0)^T, \quad x_2 = e^t(Iu_2 + (A-I)tu_2) = (te^t, \frac{1}{3}e^t, 0)^T,$
$x_3 = e^{2t}u_3 = (13e^{2t}, 3e^{2t}, e^{2t})^T.$

La matriz fundamental $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 13e^{2t} \\ 0 & \frac{1}{3}e^t & 3e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ es tal que $\Phi(t)\Phi^{-1}(0) = e^{At}$

por lo tanto

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 13e^{2t} \\ 0 & \frac{1}{3}e^t & 3e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 3te^t & -13e^t - 9te^t + 13e^{2t} \\ 0 & e^t & -3e^t + 3e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

3. Los estanques $A$ y $B$ de 50 y 100 galones de capacidad respectivamente están conectados entre si y al exterior por mangueras. Del exterior entra a ambos estanques a razón de 3 galones por minuto, agua pura al estanque $A$ y una solución salina con 1 kilo de sal por galón al estanque $B$. Por otra parte, al exterior sale solución salina a razón de 1 galón por minuto del estanque $A$ y de 5 galones por minuto del estanque $B$.

   Además, del estanque $A$ pasa solución salina al estanque $B$ a razón de 2 galones por minuto.

   En todo instante la solución en ambos instantes es homogenea e inicialmente el estanque $A$ contenía 10 kg de sal y el estanque $B$ agua pura. ¿Qué cantidad de sal contiene cada estanque en un instante $t$ ?
   ¿Qué cantidad límite(a largo plazo) de sal contiene cada estanque?

**Solución**
Sean $x(t)$ e $y(t)$ las cantidades de sal en el instante t en los estanque A y B respectivamnte. El sistema de ecuaciones que modela la situación es

$$x'(t) = -\frac{3}{50}x, \qquad x(0) = 10$$

$$y'(t) = \frac{2}{50}x - \frac{5}{100}y + 3, \qquad y(0) = 0$$

Buscamos los valores propios de $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{50} & 0 \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{50} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{20} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Los valores propios son $\lambda_1 = -\frac{3}{50}$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$ con vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

La solución general de la homogénea es
$x(t) = C_1 e^{-\frac{3}{50}t}; \qquad y(t) = -4C_1 e^{-\frac{3}{50}t} + C_2 e^{-\frac{1}{20}t}$

Si $x_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es una solución particular, remplazando vemos que $a = 0,\ b = 60$

La solución general del sistema es
$x(t) = C_1 e^{-\frac{3}{50}t}; \qquad y(t) = -4C_1 e^{-\frac{3}{50}t} + C_2 e^{-\frac{1}{20}t} + 60$. Por último buscamos $C_1$ y $C_2$ tales que $x(0) = C_1 = 10$ e $y(0) = -4C1 + C_2 + 60 = 0$. La solución con condición inicial es
$x(t) = 10e^{-\frac{3}{50}t}; \qquad y(t) = -40e^{-\frac{3}{50}t} - 20e^{-\frac{1}{20}t} + 60.$

Se tiene que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} y(t) = 60$