Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 1

1. Considere el PVI

$$\begin{cases} yy'(x) = -x \\ y(a) = b \end{cases}$$

(a) Determine el conjuntos de condiciones iniciales (a, b) para los cuales se cumple el teorema de existencia y unicidad. En estos casos resuelva el PVI.

(b) Para las condiciones iniciales (a, b) en que el el teorema no se cumple, determine si existe solución. En tal caso resuelva el PVI y decida si la solución es o no única.

Solución.

(a) Para usar el teorema de existencia y unicidad se debe escribir la ecuación en la forma $y' = f(x, y)$, vale decir

$$y' = -\frac{x}{y}$$

siendo $f(x, y) = -x/y$, con $f_y(x, y) = x/y^2$. Luego, por el teorema de existencia y unicidad, el PVI tiene solución única en una vecindad de $x = a$ cada vez que $b \neq 0$.

Ahora resolvamos la ecuación por método de variables separables.

$$\begin{aligned} y' = -\frac{x}{y} \quad &\Rightarrow \quad y\,dy = -x\,dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C \end{aligned}$$

Bajo la condición inicial $y(a) = b$ se tendrá,

$$C = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2(x) = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \text{sign}(b)\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}$$

(b) Si $b = 0$ y reemplazamos la condición inicial $y(a) = b\ (= 0)$ tendremos que

$$y(a)y'(a) = -a \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

De este modo, si $b = 0$ y $a \neq 0$ entonces el PVI no tiene solución.

Si $b = 0$, $a = 0$ e $y = y(x)$ es solución entonces $x^2 + y^2 = 0$ que tiene por solución únicamente a $y(x) = 0$ con dominio $\{0\}$ función no derivable, y por tanto no satisface la EDO.

Por lo anterior, si $b = 0$ entonces el PVI no tiene solución.

Evaluación (a).

- Asignar (**1 pto**) por determinar el conjunto solución donde la ecuación tiene solución única: $b \neq 0$. Este puntaje se asignará si al menos calculó $f_y(x, y) = x/y^2$ en caso contrario no se asignará puntaje.
- Asignar (**2.5 pto**) por resolver la ecuación diferencial, sin necesidad de aplicar la condición inicial.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar la constante dada la condición inicial. Este puntaje se asignará únicamente si se logró resolver la EDO correctamente.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar una fórmula para la solución.

Evaluación (b).

- Asignar (**1 pto**) por concluir que si $b = 0$ y $a \neq 0$ el PVI no tiene solución, como consecuencia de evaluar $b = 0$ en la ecuación diferencial.
- Asignar (**0.5 pto**) por argumentar por qué la condición inicial $a = b = 0$ no admite solución al PVI.

2. Resuelva el PVI,

$$(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0, \quad y(1) = -1$$

Solución.

Usando el criterio de las derivadas cruzadas, tendremos

$$M_y(x, y) = 2x + 4y^3 \neq 6x + 6y^3 = N_x(x, y)$$

por lo que esta ecuación no es exacta. Usaremos factor integrante, para ello calculemos

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{-4x - 2y^3}{y(2x + y^3)} = -\frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad \nu'(y) = \frac{2}{y}\nu(y) \quad \Rightarrow \quad \nu(y) = y^2$$

De este modo, la siguiente ecuación es exacta,

$$(2xy^3 + y^6)dx + (3x^2y^2 + 6xy^5)dy = 0$$

y un potencial F es

$$F(x, y) = x^2y^3 + xy^6 \equiv \text{constante} = 0$$

imponiendo la condición de $y(1) = -1$. De lo anterior se deduce que

$$xy^3(x + y^3) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) \equiv 0 \quad \text{o} \quad y(x) = -x^{1/3}$$

siendo $y(x) = -x^{1/3}$ quien satisface la condición inicial.

Evaluación

- Asignar (**0.5 pto**) por deducir que la EDO no es exacta, al verificar que las derivadas cruzadas son diferentes.
- Asignar (**1.5 pto**) por determinar una EDO para el factor integrante.
- Asignar (**1 pto**) por determinar el factor integrante.
- Asignar (**1.5 pto**) por resolver implícitamente la ecuación diferencial (potencial igual a constante) sin necesidad de aplicar las condiciones iniciales.
- Asignar (**0.5 pto**) por determinar el valor de la constante dada la concición inicial.
- Asignar (**1 pto**) por determinar que la solución a la EDO cumple: o bien $x + y^3(x)$ o bien $y(x) = -x^{1/3}$, sin que aparezca multiplicada por $y^2(x)$ alguna de las expresiones anteriores.

3. Inicialmente, un tanque de $4.000\,lt$ contiene $1.000\,lt$ de salmuera con $10\,kg$ de sal. Salmuera con $0{,}2\,kg$ de sal por litro entra al tanque a razón de $5\,lt/s$, y la mezcla total de salmuera del recipiente sale a una razón de $3\,lt/s$. ¿Cuánta sal contendrá el tanque cuando esté completamente lleno de salmuera?

Solución.

Una ecuación diferencial para $C(t)$, la cantidad de sal en el instante t, es:

$$\frac{dC}{dt} = r_e c_e - \frac{C(t)}{V(t)} r_s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dC}{dt} = 0{,}2 \cdot 5 - \frac{C(t)}{1000+2t} \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dC}{dt} = -3 \cdot \frac{C(t)}{1000+2t} + 1$$

Las soluciones homogégea y particular son:

$$C_h(t) = \frac{c_0}{(1000+2t)^{3/2}} \quad \text{y} \quad C_p(t) = \frac{1}{(1000+2t)^{3/2}} \cdot \frac{(1000+2t)^{5/2}}{5} = \frac{1000+2t}{5}$$

De este modo, si la solución general es $C(t) = C_h(t) + C_p(t)$, la condición inicial $C(0) = 10$ nos entrega por solución al PVI

$$C(t) = 200 + \frac{2t}{5} - \frac{950000\sqrt{5}}{(500+t)^{3/2}}$$

Finalmente, el tanque se habrá llenado para $t = 1500$ segundos, por lo que la cantidad de sal que tendrá el tanque en ese momento será

$$\begin{aligned} C(1500) &= 200 + \frac{2 \cdot 1500}{5} - \frac{950000\sqrt{5}}{(2000)^{3/2}} \\ &= \frac{3105}{4} \end{aligned}$$

Evaluación

- Asignar (**1 pto**) por escribir correctamente la ecuación diferencial que modela el problema.
- Asignar (**1.5 pto**) por determinar la solución homogénea de la EDO. Si el alumno uso la forma correcta de la EDO pero reemplazó mal las constantes (razón de entrada o salida del mezcla o concentración) y resuelve correctamente la EDO homogénea, asignar (**1 pto**).
- Asignar (**1.5 pto**) por determinar la solución particular de la EDO. Si el alumno uso la forma correcta de la EDO pero reemplazó mal las constantes (razón de entrada o salida del mezcla o concentración) y resuelve correctamente la EDO particular, asignar (**1 pto**).
- Asignar (**1 pto**) por determinar la constante dada la concición inicial. Si el alumno uso la forma correcta de la EDO pero reemplazó mal las constantes (razón de entrada o salida del mezcla o concentración) y resuelve correctamente la EDO particular, determinando el valor de la constante correctamente de acuerdo a su desarrollo asignar (**0.5 pto**).
- Asignar (**1 pto**) por determinar la cantidad de sal que contiene el tanque cuando éste está lleno. Si el alumno uso la forma correcta de la EDO pero reemplazó mal las constantes (razón de entrada o salida del mezcla o concentración) y resuelve correctamente la EDO particular, determinando el valor de la constante correctamente de acuerdo a su desarrollo y reemplaza el valor de $t = 1500$ en su solución, asignar (**0.5 pto**).

4. Sea α un número real y $u = u(t)$ la única solución al PVI

$$\frac{dx}{dt} = (x-\alpha)\left(\frac{1}{3} - x\right)(x^2 - \alpha), \quad x(0) = x_0$$

tal que $x(t) = \dfrac{1}{3}$ es la solución de equilibrio más cercana a x_0.

(a) Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \dfrac{1}{3}$.

(b) Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = \dfrac{1}{3}$.

Solución.

(a) Para que $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \dfrac{1}{3}$ se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Si $x_0 > 1/3$, entonces $u(t) > 1/3$ y $u'(t) < 0$, vale decir

$$(u-\alpha)\left(\frac{1}{3} - u\right)(u^2 - \alpha) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-\alpha)(u^2-\alpha) > 0$$

- Si $x_0 < 1/3$, entonces $u(t) < 1/3$ y $u'(t) > 0$, vale decir

$$(u-\alpha)\left(\frac{1}{3} - u\right)(u^2 - \alpha) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-\alpha)(u^2-\alpha) > 0$$

Haciendo tender $t \to \infty$ tendremos

$$(1/3-\alpha)(1/9-\alpha) > 0$$

inecuación que tiene como solución $(-\infty, 1/9) \cup (1/3, \infty)$.

Si $\alpha = 1/3$ o $\alpha = 1/9$, se tiene que $u'(t)$ tiene el mismo signo independiente de la condición inicial, por lo que $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ no siempre será $1/3$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \dfrac{1}{3}$ siempre y cuando $\alpha \in (-\infty, 1/9) \cup (1/3, \infty)$.

(b) Para que $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = \dfrac{1}{3}$ se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Si $x_0 > 1/3$, entonces $u(t) > 1/3$ y $u'(t) > 0$, vale decir

$$(u-\alpha)\left(\frac{1}{3} - u\right)(u^2 - \alpha) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-\alpha)(u^2-\alpha) < 0$$

- Si $x_0 < 1/3$, entonces $u(t) < 1/3$ y $u'(t) < 0$, vale decir

$$(u-\alpha)\left(\frac{1}{3} - u\right)(u^2 - \alpha) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-\alpha)(u^2-\alpha) < 0$$

Haciendo tender $t \to \infty$ tendremos

$$(1/3 - \alpha)(1/9 - \alpha) < 0$$

inecuación que tiene como solución $(1/9, 1/3)$.

Si $\alpha = 1/3$ o $\alpha = 1/9$, se tiene que $u'(t)$ tiene el mismo signo independiente de la condición inicial, por lo que $\lim_{t\to\infty} u(t)$ no siempre será $1/3$.

Por lo tanto, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \dfrac{1}{3}$ siempre y cuando $\alpha \in (1/9, 1/3)$.

Evaluación

- Asignar (**1.5 pto**) por determinar justificadamente, con un desarrollo comprensible, que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 1/3$ cuando $\alpha \in (-\infty, 1/9)$.
- Asignar (**1.5 pto**) por determinar justificadamente, con un desarrollo comprensible, que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 1/3$ cuando $\alpha \in (1/3, \infty)$.
- Asignar (**1.5 pto**) por determinar justificadamente, con un desarrollo comprensible, que $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 1/3$ cuando $\alpha \in (1/9, 1/3)$.
- Asignar (**0.75 pto**) por argumentar o dar una prueba que para $\alpha = 1/3$ el límite depende de la condición inicial x_0.
- Asignar (**0.75 pto**) por argumentar o dar una prueba que para $\alpha = 1/9$ el límite depende de la condición inicial x_0.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa