Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
13 de noviembre de 2013

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales - Interrogación N° 3

1. Calcule la solución del problema de valor inicial del sistema no homogénea

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Primero calculamos los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característica esta dado por $\det(A - \lambda) = \lambda^2 - 1$, y por tanto $\lambda = 1$ y $\mu = -1$ son los valores propios . El vectores propios $\vec{v}$ associado con $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $a = b$ y por tanto $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. El vectores propios $\vec{u}$ associado con $\mu = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $c = 3d$ y por tanto $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Encontrar los vectores propios:

Dos soluciones LI del sistema homogénea son por tanto:

$$\vec{y}_1(t) = e^t \vec{v}, \quad \vec{y}_2(t) = e^{-t} \vec{u}$$

La matriz fundamental esta dada por:

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$$

También:

$$\Psi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La exponecial $E(t) = e^{tA} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}$ esta dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^t + 3e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & 3e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$$

La solución del PVI esta dada por $\vec{y}(t) = \vec{y}_h(t) + \vec{y}_p(t)$ donde

$$\vec{y}_h(t) = E(t)\vec{z}_0, \quad \vec{y}_p(t) = \int_0^t E(t-s)\vec{f}(s)ds$$

donde $z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}$. Calcular nos da:

$$\vec{y}_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + 3^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_p(t) = \int_0^t E(t-s)f(s) = \int_0^t \begin{pmatrix} s(-e^{t-s}+3e^{s-t}) + 9(e^{t-s}-e^{t-s}) \\ s(e^{t-s}-e^{s-t}) + 3e^s(3e^{t-s}-e^{s-t}) \end{pmatrix} ds$$

También:

$$\vec{y}_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (18t-11)e^t + 11e^{-t} + 4t \\ (18t-1)e^t + 1e^{-t} - 4t \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + 3^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (18t-11)e^t + 11e^{-t} + 4t \\ (18t-1)e^t + 1e^{-t} - 4t \end{pmatrix}$$

2. Encuentre la solución $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ del problema de valor inicial

$$y'' + y = e^t + \delta(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

y demuestre que $y(t)$ no es diferenciable para todo t.

($\delta(t)$ es la función delta de Dirac)

Solución: Define $Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$. Entonces

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuacción diferencial obtenemos

$$s^2Y + Y = \mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = \frac{1}{s-1} + e^{-s}$$

Resolviendo:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(1+s^2)} + \frac{e^{-s}}{1+s^2}$$

Ahora calcularemos las transformadas inversas. Primero:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}\frac{1}{s^2+1}\} = u(t-1)\operatorname{sen}(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ \operatorname{sen}(t-1) & t \ge 1 \end{cases}$$

pues $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = 1/(s^2+1)$.

Además:

$$\frac{1}{(s-1)(1+s^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1})$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(1+s^2)}\} = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

En particular:

$$y(t) = u(t-1)\operatorname{sen}(t-1) + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

La función $u(t-1)\operatorname{sen}(t-1)$ es diferenciable para todo $t \neq 1$, pero no es diferenciable en $t = 1$: la derivada lateral de izquierda es 0 en $t = 1$ y la derivada lateral de derecha es $\cos(1-1) = 1 \neq 0$ en $t = 1$. Entonces $y(t)$ no es diferenciable en $t = 1$.

3. *a*) Encuentre la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2s-3}{(s^2+2s+5)^2}\}$$

b) Sea $f(t)$ una función con la propiedad $f(t+\omega) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y donde $\omega > 0$ es una constante. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^\omega e^{-st} f(t)dt}{1 + e^{-\omega s}}$$

(Indicación: Escriba $\displaystyle\int_0^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega}$)

Solución (a): Escriba primero:

$$F(s) := \frac{s^2 + 2s - 3}{(s^2 + 2s + 5)^2} = \frac{(s+1)^2 - 4}{[(s+1)^2 + 4]^2} = G(s+1), \qquad G(s) = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$$

Por tanto $f(t) = e^{-t} g(t)$.

Hay tres maneras para encontrar $g(t)$. Primero observamos:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4} - \frac{8}{(s^2 + 4)^2}$$

Usando el formulario:

$$g(t) = \operatorname{sen}(2t)/2 - \frac{8}{2^3}(\operatorname{sen}(2t)/2 - 2t\cos(2t)) = t\cos(2t)$$

Usando convolución:

$$g(t) = \operatorname{sen}(2t)/2 - 2\operatorname{sen}(2t) * \operatorname{sen}(2t) = \operatorname{sen}(2t)/2 - (\operatorname{sen}(2t)/2 - t\cos(2t)) = t\cos(2t)$$

Tercero, si usamos la observación

$$G(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right)$$

entonces también obtenemos $g(t) = t\cos(2t)$.

Entonces

$$f(t) = e^{-t} t\cos(2t)$$

Solución (b):

Primero observamos que

$$f(t + n\omega) = (-1)^n f(t), \qquad t \geq 0$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} e^{-st} f(t)dt$$

Si en cada integral hacemos el cambio de variable $t = \tau + n\omega$ obtenemos:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\omega e^{-s(\tau + n\omega)} f(\tau + n\omega)d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-s\omega n} \int_0^\omega e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

El factor frente del integral es una serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-s\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-s\omega})^n = \frac{1}{1 - ((-e^{-s\omega}))} = \frac{1}{1 + e^{-s\omega}}$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{1}{1 + e^{-s\omega}} \int_0^\omega e^{-st} f(t)dt$$

Solución alternative: Usa que la función $f(t)$ es periodico con periodo $p = 2\omega$ y escribir

$$\int_0^{2\omega} = \int_0^\omega + \int_\omega^{2\omega}$$

4. *a*) Para cada constante $a \in \mathbb{R}$ calcular la exponencial e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

b) Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución (a): Si $a = 0$ entonces $A^2 = 0$, por tanto $A^n = 0$ para todo $n \geq 2$. Esto implica

$$e^{tA} = 1 + tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos que $a \neq 0$. El polinomio característica esta dado por

$$\det(A - \lambda) = (a - \lambda)^2 - a$$

Entonces los dos (distintos) valores propios son dado por

$$\lambda = a + \sqrt{a}, \quad \mu = a - \sqrt{a}$$

(para $a < 0$ los valores propio son complejo). El vector propio $\vec{v}$ associado con $\lambda = a + \sqrt{a}$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{a} & a \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Es decir $v_1 = v_2\sqrt{a}$. Por tanto $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 1 \end{pmatrix}$.

El vector propio $\vec{u}$ associado con $\mu = a - \sqrt{a}$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & a \\ 1 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Es decir $u_1 + u_2\sqrt{a} = 0$. Por tanto $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entonces un conjunto fundamental es:

$$\vec{y}_1 = e^{\lambda t}\vec{v}, \quad \vec{y}_2 = e^{\mu t}\vec{u},$$

Ahora usamos la formula

$$E(t) = e^{tA} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}$$

donde $\Psi(t)$ es la matriz fundamental:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(a+\sqrt{a})t}\sqrt{a} & e^{(a-\sqrt{a})t}\sqrt{a} \\ e^{(a+\sqrt{a})t} & -e^{(a-\sqrt{a})t} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{2\sqrt{a}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{a} \\ -1 & \sqrt{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{a} \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{pmatrix} e^{(a+\sqrt{a})t}\sqrt{a} & e^{(a-\sqrt{a})t}\sqrt{a} \\ e^{(a+\sqrt{a})t} & -e^{(a-\sqrt{a})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{a} \\ 1 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \begin{pmatrix} \sqrt{a}e^{at}(e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}) & a(e^{\sqrt{a}t} - e^{-\sqrt{a}t}) \\ e^{at}(e^{\sqrt{a}t} - e^{-\sqrt{a}t}) & \sqrt{a}e^{at}(e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{at}(e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}) & \sqrt{a}e^{at}(e^{\sqrt{a}t} - e^{-\sqrt{a}t}) \\ \frac{e^{at}(e^{\sqrt{a}t} - e^{-\sqrt{a}t})}{\sqrt{a}} & e^{at}(e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución (b): Podemos usar la parte (a) con $a = -4$. Entonces

$$E(t) = e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-4t}(e^{2it} + e^{-2it}) & 2ie^{-4t}(e^{2it} - e^{-2it}) \\ \frac{e^{-4t}(e^{2it} - e^{-2it})}{2i} & e^{-4t}(e^{2it} + e^{-2it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t}\cos 2t & -2e^{-4t}\operatorname{sen}(2t) \\ e^{-4t}\operatorname{sen}(2t)/2 & e^{-4t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

La solución del PVI esta dado por

$$\vec{y}(t) = \Psi(t)\Psi(0)^{-1}\vec{y}_0 = E(t)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 6\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) + 3\cos 2t \end{pmatrix}$$

TIEMPO: 2 horas