PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales MAT 1640
Interrogación 3
Solución

1 de Junio, 2017

1. (a) Una masa de 1 kg unida a un resorte cuya constante (de rigidez) de elasticidad es 4 N/m se libera desde el reposo a 2 metros de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. Después de 2π segundos, la masa recibe un golpe con un martillo que suministra un impulso unitario (fuerza de 1 N) sobre la masa. Suponiendo que no hay amortiguador, halle la posición $x = x(t)$ de la masa en cualquier instante.

   (b) Encuentre $y = y(x)$ solución de

$$\int_0^x \operatorname{sen}(x-s)y(s)\,ds = x^2.$$

Solución:

(a) Se tiene

$$x''(t) + 4x(t) = \delta_{2\pi}(t), \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0,$$

[0,5 pts]

Pasando a la transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\left(x'' + 4x\right)(s) = (s^2+4)\mathcal{L}(x)(s) - 2s, \quad \mathcal{L}(\delta_{2\pi}) = e^{-2\pi t}.$$

[1 pt]

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{e^{-2\pi t}}{s^2+4}$$
$$= \mathcal{L}\left(2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin(2(t-2\pi))U(t-2\pi)\right),$$

donde $U(z) = 0$ si $z < 0$, y $U(z) = 1$ si $z > 0$. [1 pt]
Se tiene $x(t) = 2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin(2(t-2\pi))U(t-2\pi)$. [0,5 pts]

(b) Por el teorema de convolución, se obtiene

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x \sin(x-s)y(s)\,ds\right)(s) = \mathcal{L}(\sin x)(s)\mathcal{L}(y)(s) = \frac{\mathcal{L}(y)(s)}{s^2+1}.$$

[1 pt]

Además $\mathcal{L}(x^2)(s) = \frac{2}{s^3}$. [0,5 pts]

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^3} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} = \mathcal{L}(2+x^2)(s).$$

[1 pt]

Sigue que $y(x) = 2 + x^2$. [0,5 pts]

2. Encuentre la solución del problema

$$y'(x) - 5y(x) + 6\int_0^x y(s)\,ds = f(x), \quad y(0) = 0$$

donde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 2+x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Solución:

Pasando a la transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\left(y'(x) - 5y(x) + 6\int_0^x y(s)\,ds\right)(s) = \left(s - 5 + \frac{6}{s}\right)\mathcal{L}(y)(s).$$

[1 pt]

Sea $U_a(x) = U(x-a)$, donde $U(z) = 0$ si $z < 0$, y $U(z) = 1$ si $z > 0$. Pues $f(x) = U_0(x) + (1+x)U_1(x) = U_0(x) + g(x-1)U_1(x)$, donde $g(x) = 2+x$, se tiene

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} + e^{-s}\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right).$$

[1 pt]

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(s) &= \frac{1}{s^2 - 5s + 6} + \frac{e^{-s}}{s^2 - 5s + 6}\left(\frac{1}{s} + 2\right) \\ &= \frac{1}{s^2 - 5s + 6} + \frac{e^{-s}}{s(s^2 - 5s + 6)} + \frac{2e^{-s}}{s^2 - 5s + 6}\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2 - 5s + 6} &= -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3} \\ &= \mathcal{L}\left(-e^{2x} + e^{3x}\right)(s)\end{aligned}$$

[1 pt]

y

$$e^{-s}\frac{2}{s^2 - 5s + 6} = \mathcal{L}\left(\left[-2e^{2(x-1)} + 2e^{3(x-1)}\right]U_1(x)\right)(s)$$

[1 pt]

Además

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2 - 5s + 6)} &= \frac{1}{6s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-3} \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}\right)(s)\end{aligned}$$

y

$$e^{-s}\frac{1}{s(s^2-5s+6)} = \mathcal{L}\left(\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{2(x-1)}+\frac{1}{3}e^{3(x-1)}\right]U_1(x)\right)(s).$$

[1 pt]

Entonces, se obtiene

$$y(x) = -e^{2x}+e^{3x}+U_1(x)\left[\frac{1}{6}-\frac{5}{2}e^{2(x-1)}+\frac{7}{3}e^{3(x-1)}\right].$$

[1 pt]

3. Encuentre la solución $(x(t), y(t))$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = 4x + 9y, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Solución: El sistema está dado por $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico $|A - \lambda| = (\lambda - 5)^2$ tiene raís $\lambda = 5$ con multiplicidad 2. [1 pt]
El vector propio $\mathbf{v}$ está dado por

$$\begin{bmatrix} 1-5 & -4 \\ 4 & 9-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o $v_1 + v_2 = 0$. Entonces $\mathbf{v} = [1, -1]^T$ el único vector propio. [1 pt]
El vector propio generalizado $\mathbf{w}$ está dado por $(A-5I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$ o $w_1+w_2 = -\frac{1}{4}$. Entonces $\mathbf{w} = [0, -1/4]^T$ un vector propio generalizado. [1 pt]
La solución general está dado por

$$\mathbf{x} = c_1 e^{5t}\mathbf{v} + c_2 e^{5t}(t\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

[1 pt]
Con los valores iniciales tenemos $c_1 = 1$ y $c_2 = -12$. Entonces, la solución está dado por

$$\begin{cases} x(t) = e^{5t} - 12te^{5t}, \\ y(t) = 2e^{5t} + 12te^{5t}. \end{cases}$$

[2 pts]

4. Calcule e^{At} donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución: La matriz exponencial está dado por

$$e^{At} = \Phi(t)(\Phi(0))^{-1}$$

con $\Phi(t)$ la matriz fundamental. [1 pt]
Los valores propios son $\lambda_1 = 2 + i$ y $\lambda_2 = 2 - i$. [1 pt]
El vector propio $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T$ para λ_1 satisface la ecuación

$$-(1+i)v_1 + 2v_2 = 0,$$

entonces $\mathbf{v} = [2, 1+i]^T$ un vector propio. [1 pt]
Tenemos

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v} = e^{2t}(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \begin{bmatrix} 2 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

y las soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ son

$$\mathbf{x}_1(t) = \Re(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}) = e^{2t} \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}_2(t) = \Im(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}) = e^{2t} \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) + \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}.$$

[1 pt]

La matriz fundamental está dado por

$$\Phi(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 2\cos(t) & 2\,\mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) - \mathrm{sen}(t) & \cos(t) + \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}$$

y

$$(\Phi(0))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

[1 pt]

Entonces,

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos(t) - \mathrm{sen}(t) & 2\,\mathrm{sen}(t) \\ -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) + \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}.$$

[1 pt]