PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEMESTRE DE VERANO 2018

Interrogación 1
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y.$

   b) $2y' + \dfrac{1}{x}y = x^2y^{-1}.$

   Solución:

   a) Primero notemos que la ecuación es de variable separable. Por otro lado la ecuación admite la solución $y(x) \equiv 0$. Si y es otra solución, entonces

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{dy}{dx} = 2y \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{2}{1-x^2}dx \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2}{1-x^2}dx \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}dx \\
&\Rightarrow \quad \ln(|y|) = -\ln(|1-x|) + \ln(|1+x|) + C \\
&\Rightarrow \quad \ln(|y|) = \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \\
&\Rightarrow \quad |y(x)| = e^C \left|\frac{1+x}{1-x}\right|.
\end{aligned}$$

   b) La ecuación es de Bernoulli con $n = -1$ y esta se puede escribir como

$$2yy' + \frac{1}{x}y^2 = x^2.$$

Haciendo el cambio de variable $u = y^2$ tenemos que $u' = 2yy'$. Reemplazando tenemos

$$u' + \frac{1}{x}u = x^2.$$

que es lineal de primer orden. Luego

$$\begin{aligned}
u' + \frac{1}{x}u = x^2 &\Rightarrow (u' + \frac{1}{x}u)e^{\int \frac{1}{x}dx} = x^2 e^{\int \frac{1}{x}dx} \\
&\Rightarrow u'x + u = x^3 \\
&\Rightarrow (ux)' = x^3 \\
&\Rightarrow ux = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \\
&\Rightarrow u = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x} \\
&\Rightarrow y^2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

2. *a*) La ecuación $\left(xy+1+\dfrac{2x}{e^{xy}}\right)dx+x^2dy=0$ es exacta cuando se multiplica por un factor integrante de la forma $e^{\alpha xy}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$. Determine α y resuelva la ecuación ocupando el factor integrante.

   b) Resuelva $xyy'+y^2=\text{sen}(x)$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ haciendo $y^2=u$.

Solución:

Solución:

a) Sabemos que $\left(xy+1+\dfrac{2x}{e^{xy}}\right)e^{\alpha xy}dx+x^2e^{\alpha xy}dy=0$ es exacta para algun α. Luego se debe tener que

$$\left(\left(xy+1+\frac{2x}{e^{xy}}\right)e^{\alpha xy}\right)_y=\left(x^2e^{\alpha xy}\right)_x\Leftrightarrow(\alpha-1)x(2xe^{(\alpha-1)xy}+e^{\alpha xy})=0\Leftrightarrow\alpha=1$$

De lo anterior sabemos que $(xye^{xy}+e^{xy}+2x)\,dx+x^2e^{xy}dy=0$ es exacta. Luego sabemos que existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=C$ define las soluciones de la ecuación donde f cumple que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int xye^{xy}+e^{xy}+2xdx+C_1(y). \\ f(x,y) &= \int x^2e^{xy}dy+C_2(x). \end{aligned}$$

Integrando e igualando para encontrar $C_1(y)$ y $C_2(x)$ tenemos que las soluciones estan dadas por la relación

$$xe^{xy}+x^2=C$$

b) Si $u=y^2$, entonces $u'=2yy'$. Reemplazando obtenemos la ecuación lineal de primer orden

$$u'+\frac{2}{x}u=2\frac{\text{sen}(x)}{x}$$

El factor integrante esta dado por $e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$. De esto tenemos

$$\begin{aligned} u' + \frac{2}{x}u = 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} &\Rightarrow x^2u' + 2xu = 2x\operatorname{sen}(x) \\ &\Rightarrow (x^2u)' = 2x\operatorname{sen}(x) \\ &\Rightarrow x^2u = \int 2x\operatorname{sen}(x)dx + C \\ &\Rightarrow x^2u = 2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + C \\ &\Rightarrow u = \frac{2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + C}{x^2} \\ &\Rightarrow y^2(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + C}{x^2} \end{aligned}$$

Como $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, entonces $C = \frac{\pi^2}{4} - 2$. Finalmente la solución esta definida por la relación

$$y^2(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x) - 2x\cos(x) + \frac{\pi^2}{4} - 2}{x^2}.$$

3. *a*) Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy^{1/2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

verificar que $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \dfrac{x^4}{16}$ son soluciones de él ¿Contradice este resultado el teorema de existencia y unicidad de soluciones?

b) Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - ay + 1$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Encuentre los puntos de equilibrio como función de a y clasifíquelos.

Solución:

a) Si $y(x) \equiv 0$, entonces $y'(x) \equiv 0$ y es directo que $0 = \dfrac{dy}{dx} = x \cdot 0 = 0$ y que $y(0) = 0$.
Por otro lado si $y(x) = \dfrac{x^4}{16}$, entonces $y'(x) = \dfrac{x^3}{4}$ y $\dfrac{x^3}{4} = \dfrac{dy}{dx} = x\left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \dfrac{x^3}{4}$.
Ademas $y(0) = \dfrac{0^4}{16} = 0$. Luego ambas funciones son solución del PVI.
Ahora bien, si $f(x, y) = xy^{1/2}$, entonces se tiene que f es continua, pero no $f_y(x, y)$ en $y = 0$. Luego las hipótesis del teorema de existencia y unicidad no se cumplen y, por lo tanto, no podemos asegurar unicidad. De lo anterior vemos que la existencia de dos soluciones al PVI no es una contradicción al TEU.

b) Notemos que la ecuación $f(y) = y^2 - ay + 1 = 0$ de tener solución estas deberian ser $y = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. De lo anterior tenemos

- Si $|a| < 2$, entonces no hay puntos de equilibrio.
- Si $a = 2$, entonces $y = 1$ es punto de equilibrio y como $f(y) = (y + 1)^2$ eso quiere decir que las soluciones que pasan cerca del punto $(0, 1)$ son crecientes. Luego tenemos que $y = 1$ es un nodo.
- Si $a = -2$, entonces $y = -1$ es punto de equilibrio y como $f(y) = (y - 1)^2$ eso quiere decir que las soluciones que pasan cerca del punto $(0, 1)$ son crecientes. Luego tenemos que $y = -1$ es un nodo.

- Si $|a| > 2$, entonces $y = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$ son puntos equilibrio. Como $f'(y) = 2y - a$, entonces

$$f'\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right) = \sqrt{a^2-4} > 0$$

Luego el punto $y = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ es fuente.

$$f'\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right) = -\sqrt{a^2-4} < 0$$

Luego el punto $y = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ es sumidero.

4. La policía descubre el cuerpo de un profesor del curso Mat1640. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuando se cometió el crimen. La forense llega al medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 30 grados Celsius. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29 grados Celsius. Asimismo, observa que la temperatura de la sala de clases E12, donde el cuerpo fue encontrado, es constante a 27 grados Celsius. Suponiendo que la temperatura de la vítima era normal en el momento de su fallecimiento (37 grados Celsius). Determine la hora en que se cometió el crimen.

   Solución:

   Sea $T(t)$ la temperatura del cuerpo en el tiempo t (medido en horas). Supongamos que el tiempo empieza a correr desde que la forense llega al lugar. Con esto tenemos que el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(27-T) \\ T(0) &= 30 \\ T(1) &= 29 \end{aligned}$$

   La ecuación $\dfrac{dT}{dt} = k(27-T)$ es de variable separable cuya solución es

$$T(t) = 27 + Ce^{-kt}$$

   Como $T(0) = 30$, entonces $C = 3$ y, por lo tanto,

$$T(t) = 27 + 3e^{-kt}$$

   Como $T(1) = 29$, entonces $k = \ln(3/2)$ y, por lo tanto,

$$T(t) = 27 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^t$$

   Luego buscamos t para que $T(t) = 37$ lo que es equivalente a

$$37 = 27 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^t$$

   De donde

$$t = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx -2,97$$

Lo que significa que la hora en que se cometió el crimen fue a las

$$12:00 - 2,97 = 9:02$$