Ecuaciones Diferenciales * MAT1640

EXAMEN

Problema 1
Considere la ecuación diferencial no lineal de primer orden siguiente:

$$(2xy^2 - 2y)dx + (3x^2y - 4x)dy = 0\,.$$

a) Calcule la solución general.

Solución.
Es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y se verifica que $M_y - N_x = -(2xy-2) \neq 0$ de modo que la ecuación no es exacta.

Pero como $\dfrac{M_y - N_x}{M} = -\dfrac{2xy-2}{y(2xy-2)} = -\dfrac{1}{y}$ el cual no depende de x. Por tanto, la ecuación admite factor integrante $\mu(y)$ función sólo de y.

Se tiene que

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{1}{y} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{integrando}} \mu(y) = y.$$

La nueva ecuación, obtenida multiplicando la original por el factor integrante $\mu(y) = y$ es

$$(2xy^3 - 2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4xy)dy = 0\,,$$

la cual es exacta de modo que su solución general es $F(x,y) = C$, donde $F(x,y)$ satisface:

$$F_x(x,y) = 2xy^3 - 2y^2; \qquad F_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4xy\,.$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x resulta

$$F(x,y) = x^2y^3 - 2xy^2 + \varphi(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{derivando c/r a y}} F_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4xy + \varphi'(y) = 3x^2y^2 - 4xy,$$

por la segunda ecuación, de modo que podemos escoger $\varphi(y) = 0$ y así llegamos a que la solución general es $x^2y^3 - 2xy^2 = C$.

b) Intervalo de definición de la solución con c.i. y(1)=2.

Solución. Imponiendo la condición $x = 1;\ y = 2$ en la solución anterior, obtenemos $C = 0$. De este modo, obtenemos para el Problema de Valor Inicial,

$$x^2y^3 - 2xy^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad xy^2(xy - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{x}\,,$$

ya que $y \neq 0$.

La condición inicial está dada en $x = 1$, luego la solución está definida en $]0, \infty[$.

Problema 2

a) Calcule la solución general del sistema homogéneo de primer orden:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \hat{x}(t)$$

Solución. La matriz $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{smallmatrix}\right]$ tiene polinomio característico $p(x) = (x+3)^2,$. Por lo que su único valor propio es $\lambda = -3$

Tiene asociado un solo vector propio $\hat{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ (salvo múltiplos).

Así obtenemos la solución $\hat{x}_1(t) = e^{-3t}\,\hat{v}$.

La segunda solución tiene la forma

$$\hat{x}_2(t) = te^{-3t}\hat{v} + e^{-3t}\hat{w} \quad \text{donde} \quad \hat{w} \quad \text{satisface} \quad (A+3I)\hat{w} = \hat{v}.$$

Resolviendo tal ecuación obtenemos $\hat{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por tanto, la solución general es

$$\hat{x}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & 1+t \\ -1 & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\hat{x}_1(t) + c_2\hat{x}_2(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2(1+t) \\ -(c_1 + c_2 t) \end{bmatrix}$$

b) La matriz de 2×2 siguiente:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ e^{3t}(2-2t) & e^{3t} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema de primer orden $\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x}$ donde A es una matriz con coeficientes constantes y $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Calcule la matriz A.

Solución. La matriz $\Phi(t)$ satisface la condición $\Phi'(t) = A\,\Phi(t)$.

Evaluando en $t = 0$ y despejando se tiene que: $A = \Phi'(0) \cdot \Phi(0)^{-1}$

Como

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 3e^{3t} & 0 \\ (4-6t)e^{3t} & 3e^{3t} \end{bmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad \Phi'(0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad \Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Problema 3
Considere la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$y'' + y' - 2y = -y^2$$

a) Convierta la ecuación en un sistema de primer orden, $\frac{d}{dt}\hat{x} = N\hat{x}$ donde $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Clasifique los puntos de equilibrio del sistema.

c) Calcule $\lim_{t\to\infty} y(t)$, donde $y(t)$ es la solución de la ecuación con condiciones iniciales $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Solución.

Para transformar la ecuación a un sistema de primer orden se realiza el cambio siguiente:

$$x_1' = x_2 \quad (1)$$
$$x_2' = 2x_1 - x_2 - x_1^2 \quad (2)$$

Los puntos críticos son $P = (0, 0)$ y $Q = (2, 0)$.

En $P = (0, 0)$ el sistema lineal asociado es

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 \end{aligned} \quad \text{equivalente a} \quad \frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\hat{x} \quad (3)$$

En $Q = (2, 0)$ el sistema lineal asociado es

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -2(x_1 - 2) - x_2 \end{aligned} \quad \text{equivalente a} \quad \frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\hat{x} \quad (4)$$

En $P = (0, 0)$ el polinomio característico es $\boxed{\lambda^2 + \lambda - 2 = 0}$ y los valores propios de la matriz en (3) son $\lambda_1 = 1$ con vector propio asociado $v_1 = \binom{1}{1}$, $\lambda_2 = -2$ con vector propio asociado $v_2 = \binom{1}{-2}$.

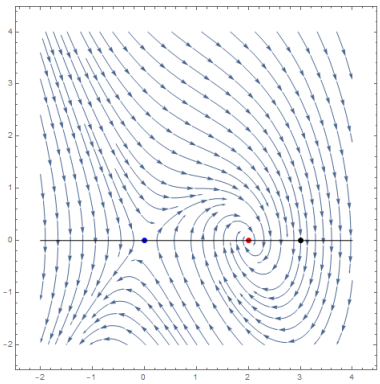
Resumiendo, en $P = (0, 0$ hay un punto silla, se expande en la dirección de v_1 y se contrae en la dirección de v_2.

En $Q = (2, 0)$ el polinomio característico es $\boxed{\lambda^2 + \lambda + 2 = 0}$. Los valores propios de la matriz en (4) son $\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{7})/2$, $\lambda_2 = (-1 - i\sqrt{7})/2$. Tienen parte real negativa. Luego las trayectorias cerca de (2,0) son espirales que se enrollan alrededor del $Q = (2, 0)$.

Usando el Teorema de Hartman se sabe que las trayectorias del sistema (2) son de algunas de estos dos tipos, dependiendo de la cercanía del punto de partida de la curva solución.

Las condiciones iniciales del sistema son$(x_1(0), x_1'(0)) = (3, 0)$.

(3,0) se encuentra a la derecha del punto de equilibrio $(2, 0)$. Luego la trayectoria que pasa por (3,0) corresponde a una de las espirales, las cuales se enrollan alrededor de $(x_1, x_2) = (2, 0)$. Por lo tanto el límite pedido es 2.



Problema 4
Considere el sistema no lineal de primer orden siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= x(1-y^2) \\ y' &= x^2 - y \end{aligned}$$

donde $x' = \frac{dx}{dt}$ y $y' = \frac{dy}{dt}$.

Clasifique los puntos de equilibrio del sistema y determine su tipo de estabilidad.

Solución.
Los puntos de equilibrio del sistema son $P1 = (0,0)$, $P2 = (1,1)$ y $P2 = (-1,1)$

En cada punto de equilibrio linearizamos el sistema:

$$P_1 = (0,0)\,, \quad \frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; P_2 = (1,1) \quad , \frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} , \quad P_3 = (-1,1) \quad , \frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por el Teorema de Hartman, estos sistemas lineales representan al sistema original en una vecindad del respectivo punto de equilibrio.

En $P_1 = (0,0)$ la matriz $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ tiene polinomio caracterítico $\lambda^2 - 1$. Luego los valores propios son reales y de diferente signo.

$\lambda_1 = -1$ vector propio $v_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
$\lambda_2 = 1\,,$ vector propio $v_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$

Luego, $P_1 = (0,0)$ es un punto silla que se expande en la dirección de v_2 y se contrae en la dirección de v_1.

En $P_2 = (1,1)$ la matriz $A_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ tiene polinomio característico $\lambda^2 + \lambda + 2$. Luego los valores propios son $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{15})$. Como los valores propios son complejos con parte real negativa, el punto $P_2 = (1,1)$ es un punto espiral que se enrolla en P_2.

En $P_2 = (-1,1)$ la matriz $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ tiene polinomio característico $\lambda^2 + \lambda + 2$. Luego los valores propios son $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{15})$. Como los valores propios son complejos con parte real negativa, el punto $P_2 = (1,1)$ es un punto espiral que se enrolla en P_3.

En resumen, P_1 no es estable y $P_2.P_3$ son asintóticamente estables.

