Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 8

Ecuaciones no homogéneas

1. Use el método de coeficientes indeterminados para determinar la solución general de las siguientes EDOs:

   (a) $y'' + 5y' + 4y = 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)$
   (b) $y^{(4)} + 9y'' = (x^2 + 1)\operatorname{sen} 3x$
   (c) $(D-1)^3 (D^2 - 4)\, y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}$

2. Use el método de variación de parámetros para resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) $y'' - 2y' - 8y = 3e^{-2x}$
   (b) $y'' + y = \csc^2 x$
   (c) $y'' - 4y = xe^x$

Aplicación al modelo de vibraciones mecánicas

Vibraciones no forzadas

3. Una masa de 3 kg está unida al extremo de un resorte estirado 20 cm por una fuerza de 15 N. Es puesto en movimiento con posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = -10$ m/s. Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

4. Los siguientes tres modelos consisten en una masa m unida a un resorte (con una constante k de estiramiento) y a un amortiguador (con una constante de amortiguamiento c). La masa se pone en movimiento desde una posición inicial x_0 con una velocidad inicial x_0'.

   - Encuentre la función de la posición $x(t)$ y determine si el movimiento es sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado.
   - Encuentre también la función de la posición no amortiguada $u(t) = C_0 \cos(\omega_0 t - \alpha_0)$, que debe resultar si la masa unida al resorte estuviera en movimiento con igual posición y velocidad iniciales, pero con el amortiguador desconectado (de tal manera que $c = 0$).

- Finalmente, construya una figura que ilustre el efecto de amortiguamiento comparando las gráficas de $x(t)$ y $u(t)$. Puede graficar con software si lo desea.

(a) $m = 3, c = 30, k = 63; x_0 = 2, v_0 = 2$

(b) $m = 1, c = 8, k = 16; x_0 = 5, v_0 = -10$

(c) $m = 2, c = 12, k = 50; x_0 = 0, v_0 = -8$

Vibraciones forzadas

5. Encuentre y grafique (con software si lo desea) la solución periódica estacionaria $x_{\text{sp}}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$, como la solución transitoria de la ecuación diferencial dada:

$$x'' + 4x' + 5x = 10\cos 3t; \quad x(0) = x'(0) = 0$$

6. Una masa que pesa 100kg está unida al extremo de un resorte que se encuentra estirado 1 metro por una fuerza de 100N. Una fuerza $F_0 \cos \omega t$ actúa sobre la masa. ¿A qué frecuencia (en Hz) ocurrirán oscilaciones de resonancia? Desprecie el amortiguamiento.

7. Considere el modelo de oscilaciones amortiguadas bajo la acción de una fuerza externa gobernado por la ecuación de la forma $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$. Investigue la posibilida de que ocurra resonancia práctica en este sistema. En particular, encuentre la amplitud $C(\omega)$ de las oscilaciones forzadas periódicas estacionarias con frecuencia ω. Obtenga la gráfica de $C(\omega)$ y encuentre la frecuencia de resonancia práctica ω (si existe alguna).

(a) $m = 1, c = 2, k = 2, F_0 = 2$

(b) $m = 1, c = 4, k = 5, F_0 = 10$