Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 1

1. Considere el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y-1} \\ y(a) = b. \end{cases} \tag{1}$$

   a) (**2 ptos**) Use el teorema de existencia y unicidad para caracterizar el conjunto de puntos (a, b) para los cuales (1) tiene solución y ésta es única.

   b) (**4 ptos**) Determine si (1) admite solución y ésta es única para la condición inicial $y(0) = 1$. Justifique sus afirmaciones: (i) si hay soluciones exhíbalas, (ii) si es única explique por qué.

Nota. Recuerde explicitar el dominio de sus soluciones.

Solución.

a) Sea $f(x, y) = x\sqrt{y-1}$, con $f_y(x, y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y-1}}$. Ambas funciones son simultáneamente continuas sobre $\{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y > 1\}$, conjunto de condiciones iniciales sobre el cual se satisface la existencia y unicidad de soluciones.

b) Claramente $y(x) = 1$, para todo número real x, es una solución al PVI. Resolviendo la EDO, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = x\,dx \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int x\,dx \\ &\Rightarrow \quad 2\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{2} + C \\ &\Rightarrow \quad y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Bajo la condición $y(0) = 1$, otra solución al PVI será

$$y(x) = \frac{x^4}{16} + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

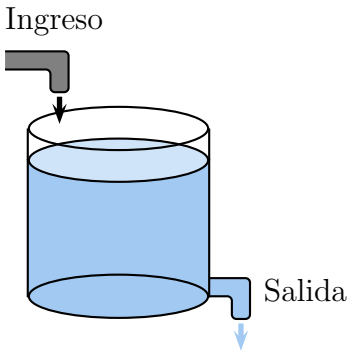
Por lo anterior, existen al menos dos soluciones al PVI. No hay unicidad.

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular correctamente f_y.
- Asignar (**1.5 ptos**) por caracterizar el conjunto donde se satisface el teorema de existencia y unicidad. Si el estudiante equivocó en calcular f_y, y a partir dee este error caracteriza el conjunto, asignnar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por aplicar separación de variables, en forma diferencial o integral.
- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular la integral en la variable x.

- Asignar (**0.5 ptos**) por calcular la integral en la variable y
- Asignar (**1 ptos**) por determinar una expresión (fórmula) para y como función de x y en término de la constante C.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar una solución al PVI a partir de la familia paramétrica en C, explicitando su dominio. Si el estudiante equivoca el dominio o no lo explicita, asignar (**0.25 ptos**)
- Asignar (**0.5 ptos**) por escribir que $y(x) = 1$ es solución, explicitando su dominio. Si el estudiante equivoca el dominio o no lo explicita, asignar (**0.25 ptos**)

2. Un tanque con capacidad de 1 000 litros contiene inicialmente $50\,kg$ de sal disueltas en 600 litros de agua. La salmuera, que contiene $0{,}2\,kg/l$ de sal, fluye hacia adentro del tanque a razón de $20\,l/min$, y la mezcla homogénea fluye hacia fuera del tanque a una razón de $10\,l/min$. Determine la cantidad de sal del tanque en el instante que el tanque se encuentra lleno.



Solución. Dados los datos del ejercicio, debemos resolver el PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0{,}2 \cdot 20 - \dfrac{10x(t)}{600+10t} \\ x(0) = 50 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4 - \dfrac{x(t)}{60+t} \\ x(0) = 50 \end{cases}$$

siendo $x(t)$ la cantidad de sal en el estanque en el instante de tiempo t, con x en kilogramos y t en minutos. Esta es una ecuación diferencial lineal, con solución general $x(t) = C\,x_h(t) + x_p(t)$, donde

$$x_h(t) = e^{-\int \frac{1}{60+t}\,dt} = \frac{1}{|60+t|} = \frac{1}{60+t}, \quad t \geq 0$$
$$x_p(t) = \frac{1}{60+t} \int 4(60+t)\,dt = \frac{240t+2t^2}{60+t}, \quad t \geq 0$$

De lo anterior, tendremos que la solución general es:

$$x(t) = \frac{C}{60+t} + \frac{240t+2t^2}{60+t}, \quad t \geq 0.$$

Usando la condición inicial $x(0) = 50$ tendremos que la solución al PVI estará dada por:

$$x(t) = \frac{3000}{60+t} + \frac{240t+2t^2}{60+t}, \quad t \geq 0.$$

Si el tanque se llena en el minuto $t = 40$, entonces la cantidad de sal en este instante es:

$$x(40) = \frac{3000}{60+40} + \frac{240 \cdot 40 + 2 \cdot 1600}{60+40} = 158\,kg$$

Evaluación.

- Asignar (**0,5 ptos**) por determinar la cantidad de sal que entra por minuto: $0{,}2 \cdot 20$ o 4. Esta cantidad puede ser explícita o implícita en la ecuación.
- Asignar (**0,5 ptos**) por determinar una fórmula para la cantidad de agua por minuto en el tanque: $600 + 10t$. Esta fórmula puede ser explícita o implícita en la ecuación.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar una ecuación diferencial que modele el problema.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar una solución homogéna. Si el estudiante determina otra ecuación (**NO EQUIVALENTE** a la propuesta en la pauta) en la forma $x'(t) = a - bx(t)/V(t)$ con a y b constantes y $V(t)$ lineal $(At+B)$ a la que determina su solución homogénea, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por determinar una solución particular. Si el estudiante determina otra ecuación (**NO EQUIVALENTE** a la propuesta en la pauta) en la forma $x'(t) = a - bx(t)/V(t)$ con a y b constantes y $V(t)$ lineal $(At+B)$ a la que determina su solución particular, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por resolver el PVI. Si el estudiante determina otra ecuación (**NO EQUIVALENTE** a la propuesta en la pauta) en la forma $x'(t) = a - bx(t)/V(t)$ con a y b constantes y $V(t)$ lineal $(At+B)$ a la que determina su solución al PVI, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el valor de $x(40)$. Si el estudiante determina otra ecuación (**NO EQUIVALENTE** a la propuesta en la pauta) en la forma $x'(t) = a - bx(t)/V(t)$ con a y b constantes y $V(t)$ lineal $(At+B)$ a la que determina su solución al PVI, asignar (**0.5 ptos**) por calcular $x(40)$.

3. *a*) (**3ptos**) Para $x > 0$, resuelva

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = y^2 + x^2 + y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

b) (**3ptos**) Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = y + y^3.$$

Solución.

a) Haciendo el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$ la ecuación queda

$$\frac{dv}{dx} = 1 + v^2.$$

Usando separación de variables obtenemos la solución

$$v(x) = \tan(x + C).$$

Despejando y y utilizando la condición inicial obtenemos

$$y(x) = x \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 1\right).$$

b) Haciendo el cambio de variable $w = y^{1-3} = y^{-2}$ obtenemos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dw}{dx} = -2w - 2,$$

que tiene como solución general $w(x) = -1 + Ce^{-2x}$ con C una constante real. Despejando y tenemos que

$$y(x) = \frac{\pm 1}{(-1 + Ce^{-2x})^{\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

con C una constante positive y x en $(-\infty, \frac{\ln C}{2}]$. A esta familia de soluciones hay que agregar la solución constante $y(x) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}$.

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por ejecutar correctamente el cambio de variable $xv = y$, y obtener la nueva ecuación diferencial. Si el estudiante ejecuta este cambio de variable pero obtiene otra ecuación diferencial (**NO EQUIVALENTE**), asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por resolver la EDO en la variable v. Si el estudiante ejecuta este cambio de variable pero obtiene otra ecuación diferencial (**NO EQUIVALENTE**) y la resuelve correctamente en la variable v, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por resolver el PVI en la variable y. Si el estudiante ejecuta este cambio de variable pero obtiene otra ecuación diferencial (**NO EQUIVALENTE**) y la resuelve correctamente en la variable v para luego resolverla el PVI en la variable y, asignar (**0.5 ptos**).

- Asignar (**1 ptos**) por ejecutar correctamente el cambio de variable $w = y^{-2}$, y obtener la nueva ecuación diferencial. Si el estudiante ejecuta este cambio de variable pero obtiene otra ecuación diferencial (**NO EQUIVALENTE**), asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por resolver la EDO en la variable w. Si el estudiante ejecuta este cambio de variable pero obtiene otra ecuación diferencial (**NO EQUIVALENTE**) y la resuelve correctamente en la variable w, asignar (**0.5 ptos**).
- Asignar (**0.8 ptos**) por determinar la familia paramétrica de soluciones para y en (2), incluyendo su dominio. Si el estudiante equivoca en el dominio, asignar (**0.4 ptos**).
- Asignar (**0.2 ptos**) por escribir que $y(x) = 0$, para todo número real x, también es solución (singular).

4. Considere la ecuación diferencial $y' = 1 - y^2$.

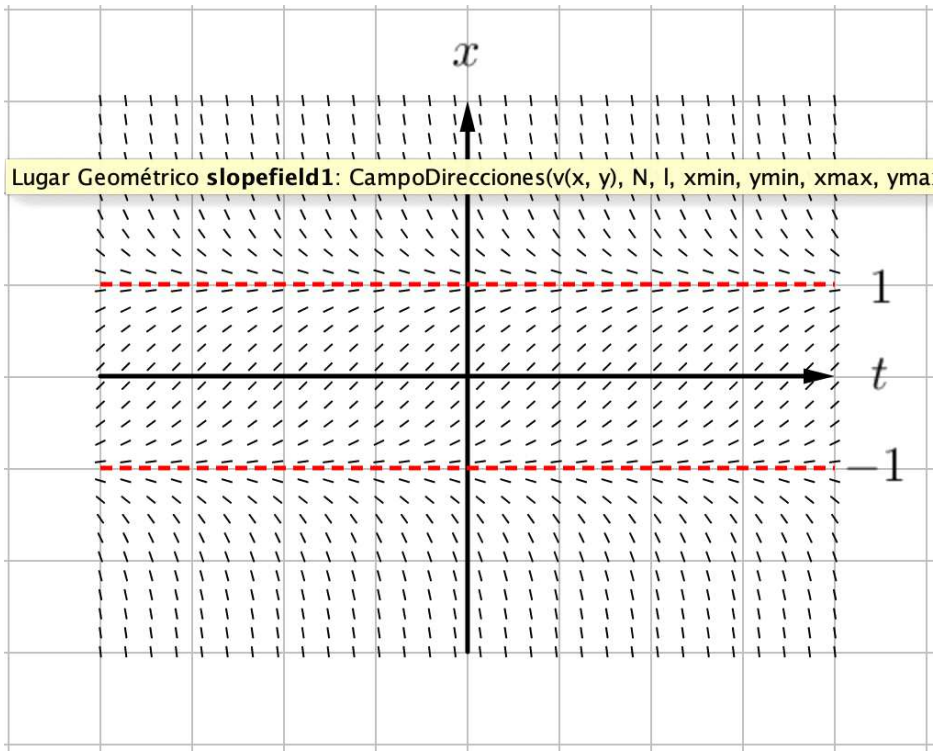
   a) (**2 ptos**) Dibuje el campo de pendientes.

   b) (**1 ptos**) Muestre que las funciones constantes $y_1(x) = -1$ e $y_2(x) = 1$ son soluciones.

   c) (**3 ptos**) Si $a \in \mathbb{R}$ y $-1 < b < 1$, use el teorema de existencia y unicidad para demostrar que el problema con valor inicial $y(a) = b$ admite solución y ésta es única. Si $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$, resuelva la ecuación y demuestre que $-1 < y(x) < 1$ para todo x en los reales.

Solución.

a) A continuación el diagrama de campo de pendientes



b) Reemplazando las funciones $y_{-1}(x) = -1$ e $y_1(x) = 1$ en la ecuación $y' = 1 - y^2$ se verifica que son soluciones de la ecuación. También pueden argumentar usando el campo de pendientes.

c) Las funciones $f(x, y) = 1 - y^2$ y $\partial_y f(x, y) = -2y$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, luego por el teorema de existencia y unicidad para todo (a, b) en $\mathbb{R}^2$ el problema con valor inicial $y(a) = b$ tiene una única solución.

Usando separación de variables se tiene que

$$y(x) = \frac{2e^{2x} - 1}{2e^{2x} + 1}$$

es solución al problema con valor inicial $y(0) = \frac{1}{2}$. Para demostrar las desigualdades $-1 < y(x) < 1$ para todo x en los reales observe que $-2e^{2x} < 2e^{2x}$ implica la desigualdad de la izquierda y que $-1 < 1$ implica la desigualdad de la derecha.

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) porque los segmentos cortos para $y > 1$ son de pendiente positiva.
- Asignar (**0.5 ptos**) porque los segmentos cortos para $y < -1$ son de pendiente positiva.

- Asignar (**0.5 ptos**) porque los segmentos cortos para $-1 < y < 1$ son de pendiente negativa.
- Asignar (**0.25 ptos**) porque los segmentos cortos para $y = 1$ son de pendiente cero.
- Asignar (**0.25 ptos**) porque los segmentos cortos para $y = -1$ son de pendiente cero.

- Asignar (**1 ptos**) por verificar que $y(x) = -1$ es solución de la edo. También puede argumentar a partir del campo de pendientes.
- Asignar (**1 ptos**) por verificar que $y(x) = 1$ es solución de la edo. También puede argumentar a partir del campo de pendientes.

- Asignar (**1 ptos**) por aplicar correctamente el teorema de existencia y unicidad.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente la solución por el método de separación de variables.
- Asignar (**1 ptos**) por demostrar que $-1 < y(x) < 1$ con $y(x)$ solución al PVI $y(0) = 1/2$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos