MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 11)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En clases anteriores...

- Comenzamos el estudio de EDO's **lineales** de orden superior,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

- Enunciamos el **Teorema de Existencia y Unicidad** para EDO's lineales.
- Buscamos primero resolver la ecuación **homogénea**

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

- La ecuación homogénea satisface el **principio de superposición**.
- Para resolver el PVI homogéneo de orden n, proponemos la solución:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n,$$

donde necesitamos que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ sean soluciones a la EDO homogénea y además sean **linealmente independientes**

¿Cómo podemos identificar de manera eficiente que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son l.i.?

Veamos primero el caso de ecuaciones de segundo orden:

Para resolver el PVI

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1.$$

buscábamos $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ con constantes c_1, c_2 tal que

$$\begin{cases} y(a) = & c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) & = b_0 \\ y'(a) = & c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) & = b_1 \end{cases}$$

Por lo tanto, necesitamos que la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix}$$

sea invertible. Pero recordemos que

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} \quad \text{invertible} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}}_{\text{determinante}} \neq 0$$

Lo anterior nos motiva a analizar la siguiente función:

Def. Dadas dos funciones diferenciables f, g, definimos el **wronskiano** de f y g como:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

Notación: Cuando queramos dejar claro a que funciones nos referimos escribiremos $W(f, g)$

Una primera propiedad importante del wronskiano:

- Si f y g son l.d. en $\mathcal{I}$ entonces $W(f, g) = 0$ para todo $x \in \mathcal{I}$.

Veremos que si y_1, y_2 son soluciones a una EDO lineal homogénea, entonces $W(y_1, y_2)$ tiene más propiedades.

Sean y_1, y_2 soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en un intervalo $\mathcal{I}$. Sabemos que

- Si y_1, y_2 son l.d. en $\mathcal{I}$, entonces $W(y_1, y_2) = 0$ para todo $x \in \mathcal{I}$.

Resulta que en realidad no necesitamos verificar la igualdad $W(y_1, y_2) = 0$ en todo $\mathcal{I}$. Esto gracias a la fórmula de Abel.

Fórmula de Abel: para y_1, y_2 existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$W(y_1, y_2) = K \exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

(se obtiene del hecho de que W es solución de: $W' + p(x)W = 0$)

De deduce de la fórmula de Abel que si $W = W(y_1, y_2)$:

$$\begin{array}{lllll} W(x) = 0 & \forall x \in \mathcal{I} & \Leftrightarrow & W(x_0) = 0 & \text{para algún} \quad x_0 \in \mathcal{I} \\ W(x) \neq 0 & \forall x \in \mathcal{I} & \Leftrightarrow & W(x_0) \neq 0 & \text{para algún} \quad x_0 \in \mathcal{I} \end{array}$$

Obs. El wronskiano $W(y_1, y_2)$ es la función nula o es siempre distinto de cero.

De lo anterior se obtiene:

Teorema. [Wronskiano de soluciones]
Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO lineal homogénea de 2do orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en $\mathcal{I}$, con p, q continuas en $\mathcal{I}$.
(a) y_1, y_2 son l.d. $\Leftrightarrow W(y_1, y_2) = 0$ en algún $x \in \mathcal{I}$
(por lo tanto en todo $\mathcal{I}$).
(b) y_1, y_2 son l.i. $\Leftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0$ en algún $x \in \mathcal{I}$
(por lo tanto en todo $\mathcal{I}$).

Del teorema anterior y el Teorema de Existencia y Unicidad se deduce:

Teorema. [Solución general de la ec. homogénea]
Sean y_1, y_2 soluciones l.i de la EDO lineal homogénea de 2do orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en $\mathcal{I}$, con p, q continuas en $\mathcal{I}$. Si Y es cualquier solución de la ecuación homogénea. entonces existen constantes c_1, c_2 tales que

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Obs. $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es la solución general y no hay soluciones singulares.

Hasta el momento:

Dadas dos soluciones l.i. de una EDO homogénea (lineal de 2do orden), somos capaces de obtener la solución general, pero

¿ Cómo encontramos estas soluciones l.i.?

Nos acercaremos a la respuesta de esta pregunta. Veremos a continuación que dada una solución y_1, podemos encontrar otra, y_2, que es linealmente independiente.

Método de reducción de orden

Consideremos la EDO: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$; con p, q continuas en $\mathcal{I}$.
Consideremos una solución $y_1(x)$ en $\mathcal{I}$.

Buscamos una solución de la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$

Luego, v debe resolver la ecuación: $\underbrace{y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0}_{\text{EDO 2do orden reducible}}$

Ejemplo: Resuelva el PVI

$$x^2y'' + xy' - 9y = 0,\ (x > 0); \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 6,$$

si se sabe que $y_1(x) = x^3$ es una solución a la ecuación.

Generalizamos algunos conceptos anteriores a ecuaciones de orden $n \geq 2$

Def. Dadas n funciones $n-1$ veces diferenciables, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, definimos su **wronskiano** como

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \ldots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se tiene que:

- $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ son l.d.en $\mathcal{I}$ entonces $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$ para todo $x \in \mathcal{I}$
- $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ son l.i. en $\mathcal{I}$ entonces $W(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$ en algún $x_0 \in \mathcal{I}$

En el caso de soluciones a la EDO lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

se tiene la **Fórmula de Abel:** existe una constante K que depende de $y_1, \ldots . y_n$ tal que,

$$W(y_1, \ldots, y_n) = K \exp\left(-\int p_1(x)dx\right).$$

Teorema. [Wronskiano de soluciones]
Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

en un intervalo $\mathcal{I}$ donde las funciones $p_1, \ldots, p_n$ son continuas. El wronskiano

$$W = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

satisface lo siguiente:
(a) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son l.d. si y sólo si $W = 0$ para algún $x \in \mathcal{I}$ (por lo tanto para todo $x \in \mathcal{I}$).
(b) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son l.i. si y sólo si $W \neq 0$ para algún $x \in \mathcal{I}$ (por lo tanto para todo $x \in \mathcal{I}$).

Con el teorema anterior se demuestra la fórmula para la solución general a la ecuación lineal homogénea.

Teorema. [Solución general de la ec. homogénea]
Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones l.i. de la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

en un intervalo $\mathcal{I}$ donde las funciones $p_1, \ldots, p_n$ son continuas. Toda solución $Y(x)$ de la ecuación anterior en $\mathcal{I}$ es de la forma

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

con $c_1, \ldots, c_n$ constantes.

Obs. $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ es la solución general a la ecuación lineal homogénea

Ejemplo Encuentre la solución al PVI

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = -39$$

si se sabe que $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = \cos(2x)$, $y_3 = \operatorname{sen}(2x)$ son soluciones de la ecuación.