Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 2

1. Un tanque contiene 1000 L de una solución compuesta de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura dentro del tanque a una razón de 5 L/s, y la mezcla -que se conserva uniforme por agitación- se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuánto tiempo pasará para que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?

2. Encuentre la solución general de

   (a)
   $$\csc^3(x)\frac{dy}{dx} = \cos^2(y)$$

   (b)
   $$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + x(y-a) = 0$$

   donde a es una constante.

3. Encuentre la solución particular explícita de los problemas de valor inicial.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = ye^x, \quad y(0) = 2e$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y - y, \quad y(1) = -3$

   (c) $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y, \quad y(4) = \dfrac{\pi}{4}$

   (d) $\cos(x)\dfrac{dy}{dx} + y\ \sin(x) = 2x\cos^2(x), \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32}$

   (e) $t^3\dfrac{dx}{dt} + 3t^2x = t, \quad x(2) = 0$

   (f) $y' + 3y = 2xe^{-3x}$

   (g) $xy' + y = 3xy, \quad y(1) = 0$

4. Con frecuencia, la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se secreta en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar mediante el problema de valor inicial:
   $$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta\cos\frac{\pi t}{12} - kx, \qquad x(0) = x_0$$

donde $x(t)$ es la cantidad de la hormona en la sangre en el instante t, α es la razón promedio de secreción, β es la cantidad de variación diaria en la secreción y k es una constante positiva que refleja la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre. Si $\alpha = \beta = 1, k = 2$ y $x_0 = 10$ halle $x(t)$.

5. Una mujer de 30 años de edad acepta un puesto de ingeniera con un salario inicial de 30000 dólares por año. Su salario $S(t)$ se incrementa exponencialmente con $S(t) = 30e^{t/20}$ miles de dólares después de t años. Mientras tanto, 12% de su salario es depositado continuamente en una cuenta para su jubilación, la cual acumula intereses a una tasa anual continua de 6%.

   (a) Estime ΔA en términos de Δt para obtener una ecuación diferencial que se satisfaga por la cantidad $A(t)$ en su cuenta de jubilación después de t años.

   (b) Calcule $A(40)$, la cantidad disponible para su retiro a la edad de 70 años.

6. Resuelva la siguiente ecuación lineal con condición inicial:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

7. Resuelva la siguiente ecuación lineal. ¿Qué pasa cuando t tiende a infinito?

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v$$