PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2014

Examen
MAT1640

1. *a*) Encuentre $y = y(x)$ que satisface simultáneamente las ecuaciones,

$$\begin{cases} y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0 \\ y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \end{cases}$$

y que tiene las condiciones iniciales $y(0) = -y'(0) = 1$.

Solución

El polinomio característico de la primera ecuación es

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)\,,$$

por los el espacio solución está generado por $e^{-2t}, e^{2t}, cost, sent$.
Para la segunda ecuación, el polinomio es

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

y el espacio solución está generado por e^t, e^{2t}, e^{-2t}.
La solución general de la intersección tiene la forma $c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$.
Usando las condiciones iniciales, se obtiene $\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}$.

b) Demuestre que todas las soluciones de la ecuación para $y(t)$

$$y' = 1 - 2\cos y\,,$$

son funciones acotadas de t.

Solución

Los puntos críticos (raíces de $f(y) = 1 - 2\cos y$) son

$$\cdots, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}, 7\frac{\pi}{3}, cdots$$

, o sea, $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n$ entero.
Dada una solución cualquiera, su dato inicial está entre dos de estas raíces y se mantiene entre estos valores, para todo t, de donde, es acotada.

2. Encuentre la solución general del sistema,

$$\begin{cases} x' = -3x + 3y + 2y \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$$

Solución

La matriz

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene por valores propios a $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad dos y a $\lambda_2 = 1$.

Para $\lambda_1 = -1$ un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y un vector propio generalizado es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$ un vector propio es

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De donde se encuentran tres soluciones linealmente independientes.

3. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema para $(x(t), y(t))$,

$$\begin{cases} x'' = -4x + y \\ y'' = -4x - 9y \end{cases}$$

con condiciones iniciales, $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -45$, $y'(0) = 0$.

Solución

Aplicando la transformada de Laplace al sistema y usando las condiciones iniciales, se obtiene el siguinte sistema lineal (algebraico) para $\mathcal{L}x, \mathcal{L}\dagger$:

$$\begin{cases} s^2\mathcal{L}x - 5s = -4\mathcal{L}x + \mathcal{L}y \\ s^2\mathcal{L}y + 45s = -4\mathcal{L}x - 9\mathcal{L}y \end{cases}$$

Despejando, se obtiene,

$$\mathcal{L}x = 5\frac{s^3}{(s^2+5)(s^2+8)}$$

y

$$\mathcal{L}y = -45\frac{s^3}{(s^2+5)(s^2+8)} - 200\frac{s}{(s^2+5)(s^2+8)}$$

Pero,

$$\frac{s^3}{(s^2+5)(s^2+8)} = \frac{8}{3}\frac{s}{s^2+8} - \frac{5}{3}\frac{s}{s^2+5}$$

Similarmente,

$$\frac{s}{(s^2+5)(s^2+8)} = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+5} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+8}$$

De lo anterior y usando que $\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+a^2} = \cos at$, se calcula$x(t)$ e $y(t)$.

4. Considere la ecuación

$$x'' \; - \; \frac{2t}{(1-t^2)}\, x' \; + \; \frac{\lambda}{1-t^2}\, x \; = \; 0 \quad (n \; entero).$$

a) Verifique que $t_0 = 0$ es un punto ordinario de esta ecuación (o sea, que los coeficientes son analíticos en 0) y que la fórmula de recurrencia para los coeficientes de una solución de la forma $\sum_{k\geq 0} c_k t^k$ es

$$c_{k+2} \; = \; \frac{k(k \; + \; 1) - \lambda}{(k \; + \; 1)\,(k \; + \; 2)} c_k$$

Solución Las funciones $\frac{t}{1-t^2}$ y $\frac{1}{1-t^2}$ son analíticas en 0. De hecho, la serie geométrica para $\frac{1}{1-x}$, con $x = t^2$ sirve para representarlas como series de potencias.

Reemplazando la serie para x, x' y x'' y multiplicando la ecuación por $1 - t^2$, se obtiene,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} \; - \; \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k t^k \; - \; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda c_k t^k \; = \; 0$$

En la primera serie se desplaza el índice k en 2 y luego se factoriza, resultando el coeficiente de t^2, para $k \geq 2$,

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + \lambda c_k \; = \; (k+1)(k+2)c_{k+2} - k(k+1)c_k + \lambda c_k,$$

Como este término es cero, sigue inmediatamente lo pedido.

b) Demuestre que si $\lambda = m(m+1)$, para algún entero positivo m, entonces la ecuación tiene una solución polinomial.

Solución Dos soluciones linealmente independientes tienen la forma, $y_1 = c_0 v_1$ y $y_1 = c_0 v_1$ (por la fórmula de recurrencia). Ahora, si $\lambda = m(m+1)$, se tendrá que $c_{m+2} = c_{m+4} = \cdots = 0$, de modo que una de estas soluciones es nu polnomio.

c) Use lo anterior para encontrar la solución general de,

$$x'' \; - \; \frac{2t}{1-t^2}\, x' \; + \; \frac{12}{1-t^2}\, x \; = \; \frac{24}{1-t^2}$$

Solución En este caso $m = 3$, de modo que $c_5 = c_7 = \cdots = 0$ y una solución para la ecuación homogénea es $y_1(t) = c_1 t + \frac{7}{3} t^3$. Una segunda solución se puede obtener por los métodos de clases (o por las soluciones en series).

Por último una solución particular para la ecuación no homogénea es $y = 2$ (coeficientes indeterminados).