Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

MAT 1640
Interrogación 2
el 3 de octubre de 2014
SOLUCIONES

Problema 1.
(i) Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cos y, \quad t > 0, \tag{1}$$

y clasifíquelos como estables (sumideros), inestables (fuentes) o semiestables (nodos).
(ii) Sea y solución de (1). Halle el límite $\lim_{t\to\infty} y(t)$ si:
a) $y(0) = -1$;
b) $y(0) = 0$;
c) $y(0) = 2$.
Solución: Los puntos de equilibrio de (1) son las soluciones de la ecuación

$$f(y) := y^2 \cos y = 0,$$

es decir

$$y_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y_* = 0.$$

Clasifiquemos estos puntos de equilibrio. Tenemos $f'(y_k) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 (-1)^{(k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $f'(y_k) > 0$ si k es impar y $f'(y_k) < 0$ si k es par, es decir:

- y_k es inestable (fuente) si k es impar;
- y_k es estable (sumidero) si k es par;

Además, $f'(y_*) = 0$, $f''(y_*) > 0$. Por lo tanto, y_* es semiestable (nodo).
(ii) a) Tenemos $-1 \in (y_{-1}, y_*) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Además, $f(-1) > 0$. Por lo tanto, si $y(0) = -1$, la solución de (1) es creciente y $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_* = 0$.
b) Tenemos $0 = y_*$ y, por supuesto, $f(0) = 0$. Por lo tanto, si $y(0) = 0$, la solución de (1) es identicamente constante y $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_* = 0$.
c) Tenemos $2 \in (y_0, y_1) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Además, $f(2) < 0$. Por lo tanto, si $y(0) = 2$, la solución de (1) es decreciente y $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 = \frac{\pi}{2}$.

Problema 2.
Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - (x^2 - 1)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(i) Verifique que si y es dos veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y satisface

$$y' + xy = 0, \tag{3}$$

entonces y satisface (2). Encuentre una solución no identicamente nula y_1 de (2).
(ii) Encuentre solución y_2 de (2) que es linealmente independiente con y_1.
Ayuda: Puede utilizar la función $\Phi(x) := \int_0^x e^{s^2} ds$, $x \in \mathbb{R}$, sin calcular la integral.
(iii) Resuelva el problema

$$\begin{cases} y'' - (x^2 - 1)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Solución: (i) Derivando (3), obtenemos $y'' + xy' + y = 0$. Expresando $y' = -xy$ por (3), obtenemos $y'' - x^2 y + y = 0$, es decir y satisface (2). La ecuación (3) es lineal homogénea de primer orden. Su solución general es $ce^{-x^2/2}$ con una constante arbitraria c. Elegiendo, digamos, $c = 1$ obtenemos una solución no identicamente nula

$$y_1(x) := e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

de (3) y por lo tanto de (2).
(ii) Por la fórmula de Abel-Liouville, una solución y_2 que es linealmente independiente con y_1 satisface

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c \tag{5}$$

con una constante $c \neq 0$. Podemos considerar (5) como una ecuación lineal de primer orden con respecto a la función desconocida y_2. Resolviendo (5), obtenemos

$$y_2(x) = ce^{-x^2/2} \int_0^x e^{s^2} ds + \tilde{c} e^{-x^2/2}$$

con una consatnte arbitraria $\tilde{c}$. Elegiendo, digamos, $c = 1$ y $\tilde{c} = 0$, obtenemos

$$y_2(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{s^2} ds = e^{-x^2/2} \Phi(x).$$

(iii) La ecuación diferencial en (4) coincide con (2). Por la parte (ii), la solución general de (2) es

$$y(x) = c_1 e^{-x^2/2} + c_2 e^{-x^2/2} \Phi(x)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Satisfaciendo las condiciones iniciales en (4), encontramos $c_1 = c_2 = 1$, es decir la solución del problema (4) es

$$y(x) = e^{-x^2/2}(1 + \Phi(x)) = e^{-x^2/2} \left(1 + \int_0^x e^{s^2} ds\right).$$

Problema 3.
Sean a, b, c tres constantes reales con $a \neq 0$. Consideremos la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Encuentre criterios sobre los parámetros a, b, c para que cualquier solución $y(t)$ de (6):
(i) satisfaga $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$;
(ii) satisfaga $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$;
(iii) sea acotada en $\mathbb{R}$.
Solución. La ecuación (6) es equivalente a

$$y'' + my' + ny = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

con $m := b/a$ y $n := c/a$. La ecuación característica asociada es

$$P(r) := r^2 + mr + n = 0.$$

Sea $\Delta := m^2 - 4n$. Escribamos la solución general de (7) en los tres casos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ y $\Delta < 0$.
Si $\Delta > 0$, entonces P tiene dos raices reales distintas $r_{1,2} = \frac{-m\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ y la solución general de (7) es

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

con dos constantes arbitrarias c_1 y c_2.
Si $\Delta = 0$, entonces P tiene una raíz real doble $r = -\frac{m}{2}$ y la solución general de (7) es

$$y(t) = e^{rt}\left(c_1 + c_2 t\right)$$

con dos constantes arbitrarias c_1 y c_2.
Si $\Delta < 0$, entonces P tiene dos raices conjugadas $r = \alpha + i\beta$ y $\bar{r} = \alpha - i\beta$ con $\alpha = -\frac{m}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. La solución general de (7) es

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \text{sen}\,(\beta t)\right)$$

con dos constantes arbitrarias c_1 y c_2. Sumando estos resultados obtenemos que:

- cualquier solución $y(t)$ de (7) satisface $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ si y sólo si $m > 0, n > 0$. En términos de a, b, c estas condiciones son equivalentes a $ab > 0, ac > 0$;

- cualquier solución $y(t)$ de (7) satisface $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ si y sólo si $m < 0, n > 0$. En términos de a, b, c estas condiciones son equivalentes a $ab < 0, ac > 0$;

- cualquier solución $y(t)$ de (7) es acotada en $\mathbb{R}$ si y sólo si $m = 0, n > 0$. En términos de a, b, c estas condiciones son equivalentes a $b = 0, ac > 0$.

Problema 4.
(i) Resuelva el problema

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 2. \end{cases} \tag{8}$$

(ii) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(7)} - 2y^{(6)} + 5y^{(5)} - 8y^{(4)} + 4y''' = t + \operatorname{sen}(3t) + e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Ayuda: Tenemos $r^7 - 2r^6 + 5r^5 - 8r^4 + 4r^3 = r^3(r^2+4)(r-1)^2$.
Solución: (i) Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \tag{10}$$

La ecuación característica asociada es $r^2 + 1 = 0$ las raices (simples) son $\pm i$. Entonces un conjunto fundamental de soluciones de (10) puede ser

$$y_1 = \cos t, \quad y_2 = \operatorname{sen} t.$$

Consideremos la ecuación no homogénea

$$y'' + y = \frac{1}{1+\cos^2 t}. \tag{11}$$

Busquemos una solución particular de (11) en la forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 \cos t + u_2 \operatorname{sen} t$$

donde u_1 y u_2 satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \cos t\, u_1' + \operatorname{sen} t\, u_2' = 0, \\ -\operatorname{sen} t\, u_1' + \cos t\, u_2' = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \end{cases}$$

es decir $u_1' = -\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}$ ó

$$u_1 = -\int \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t} dt = \arctan(\cos t)$$

y $u_2' = \frac{\cos t}{1+\cos^2 t}$ ó

$$u_2 = \int \frac{\cos t}{1+\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{2 - \operatorname{sen}^2 t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen} t}{\sqrt{2} - \operatorname{sen} t}\right).$$

Entonces, la colución general de (11) es

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + (\cos t) \arctan(\cos t) + \frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen} t}{\sqrt{2} - \operatorname{sen} t}\right)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Satisfaciendo las condiciones iniciales en (8), encontramos $c_1 = \frac{\pi}{4} - 1$ y $c_2 = -2$, es decir la solución del problema (8) es

$$y(t) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\cos t - 2\operatorname{sen} t + (\cos t)\arctan(\cos t) + \frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}-\operatorname{sen} t}\right)$$

(ii) Consideremos la ecuación homogénea

$$y^{(7)} - 2y^{(6)} + 5y^{(5)} - 8y^{(4)} + 4y''' = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

La ecuación característica asociada es

$$P(r) := r^7 - 2r^6 + 5r^5 - 8r^4 + 4r^3 = 0.$$

Como $P(r) = r^3(r^2+4)(r-1)^2$, sus raices son $r_1 = 0$ de multiplicidad $\ell_1 = 3$, $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$ de multiplicidad $\ell_2 = \ell_3 = 1$ y $r_4 = 1$ de multiplicidad $\ell_4 = 2$. Entonces un conjunto fundamental de soluciones de (12) puede ser

$$y_1 = 1,\ y_2 = t,\ y_3 = t^2,\ y_4 = \cos(2t),\ y_5 = \operatorname{sen}(2t),\ y_6 = e^t,\ y_7 = te^t.$$

Consideremos ahora la ecuación no homogénea (9). Vamos a buscar una solución particular de (9) en la forma

$$y_p = t^3(At+B) + C\cos(3t) + D\operatorname{sen}(3t) + Ee^{2t}$$

donde A, B, C, D, E son coeficientes a determinar. Reemplazando en (9), obtenemos

$$A = \frac{1}{96},\ B = -\frac{1}{12},\ C = \frac{2}{3375},\ D = \frac{1}{2250},\ E = \frac{1}{64}.$$

Entonces, la solución general de (9) es

$$y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4\cos(2t) + c_5\operatorname{sen}(2t) + c_6 e^t + c_7 te^t +$$

$$+\frac{1}{96}t^3(t-8) + \frac{2}{3375}\cos(3t) + \frac{1}{2250}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{64}e^{2t}$$

donde $c_1, \ldots, c_7$ son constantes arbitrarias.