PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2020

INTERROGACIÓN 3 – PAUTA
MAT1640

`Tabla de transformadas`

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$t^n f$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$f(t)U(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}(f(t+a))$	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	f	$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$		

Problema 1. Resuelva

$$x''+6x'+5x=f(t)+\delta(t-1)\ ,\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=0, \text{ donde } f(t)=\begin{cases} e^t & ,\ 0\le t<2 \\ 0 & ,\ t\ge 2. \end{cases}$$

Solución Problema 1. Aplicando transformada de Laplace

$$-x'(0)-sx(0)+s^2X+6(-x(0)+sX)+5X=F(s)+e^{-s}. \textbf{ [1 pt]}$$

Notemos que

$$f(t)=e^t(1-U(t-2))=e^t-e^2e^{t-2}U(t-2)$$

por lo que

$$F(s)=\frac{1}{s-1}-e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}. \textbf{ [1 pt]}$$

Entonces

$$X(s)=\frac{s+6}{s^2+6s+5}+\frac{1-e^{2-2s}}{(s-1)(s^2+6s+5)}+\frac{e^{-s}}{s^2+6s+5} \textbf{ [1 pt]}$$

o, usando fracciones parciales,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{4}\left[\frac{5}{s+1}-\frac{1}{s+5}\right]+\left[\frac{1}{12}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{24}\frac{1}{s+5}\right](1-e^{2-2s})+\frac{e^{-s}}{4}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+5}\right] \\ &= \frac{9}{8}\frac{1}{s+1}-\frac{5}{24}\frac{1}{s+5}+\frac{1}{12}\frac{1}{s-1}-\left[\frac{1}{12}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{24}\frac{1}{s+5}\right]e^{2-2s}+\frac{e^{-s}}{4}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+5}\right]. \textbf{ [1,5 pts]} \end{aligned}$$

Luego,

$$x(t)=\frac{9}{8}e^{-t}-\frac{5}{24}e^{-5t}+\frac{1}{12}e^t-e^2\left[\frac{1}{12}e^{t-2}-\frac{1}{8}e^{-t+2}+\frac{1}{24}e^{-5t+10}\right]U(t-2)+\frac{1}{4}\left[e^{-t+1}-e^{-5t+5}\right]U(t-1). \textbf{ [1,5 pts]}$$

Problema 2. a) Encuentre la solución general de

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X$$

b) Encuentre la solución general de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \tan(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución Problema 2.
a) Calculamos

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3$$

por lo que $\lambda = 3$ (**[0,5 pt]**) es el único valor propio. Notemos que

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que un vector propio es e_1 (**[0,5 pt]**). Construimos una 3-cadena basada en e_1. Es directo que

$$(A - 3I)e_2 = e_1 \text{ y } (A - 3I)e_3 = e_2$$

por lo que la solución general puede escribirse como

$$X(t) = c_1 e_1 e^{3t} + c_2 \left[e_1 t + e_2\right] e^{3t} + c_3 \left[e_1 \frac{t^2}{2} + e_2 t + e_3\right] e^{3t}. \textbf{ [1,5 pt]}$$

Método alternativo. Dado que la matriz se puede reescribir como

$$A = 3I + N \ , \ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que $e^{At} = e^{3t} e^{Nt}$. Como N es nilpotente, con $N^3 = 0$,

$$e^{Nt} = I + Nt + N^2 \frac{t^2}{2} = I + Nt + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} \textbf{ [0,5 pt]}$$

y entonces

$$e^{Nt} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2} e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}. \textbf{ [1 pt]}$$

Luego, la solución general es

$$X(t) = e^{Nt}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{3t} \\ c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} \\ c_3 e^{3t} \end{pmatrix}. \textbf{ [1 pt]}$$

b) Calculamos

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2) + 2 = \lambda^2 + 1$$

por lo que los valores propios son $\lambda = i$ y $\bar{\lambda} = -i$ (**[0,5 pt]**). Se verifica que un vector propio para λ es

$$K = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}. \textbf{ [0,5 pt]}$$

Luego la solución del problema homogéneo asociado es

$$\begin{aligned} X_c(t) &= c_1\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(t)\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(t)\right] \\ &= c_1\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \textbf{ [0,5 pt]} \end{aligned}$$

Para encontrar una solución particular usamos variación de parámetros. Podemos elegir

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) & \sin(t) + \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \text{ de modo que } \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & \sin(t) + \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} \textbf{ [0,5 pt]}$$

de modo que

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi \int \Phi^{-1}\begin{pmatrix} \tan(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \Phi \int \begin{pmatrix} -\sin(t)\tan(t) + \sin(t) + \cos(t) \\ 2\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \Phi \begin{pmatrix} \sin(t) - \ln|\sec(t) + \tan(t)| - \cos(t) + \sin(t) \\ -2\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \textbf{ [0,5 pt]} \\ &= \begin{pmatrix} (-\ln|\sec(t) + \tan(t)| + 2\sin(t) - \cos(t))(\cos(t) - \sin(t)) - (\sin(t) + \cos(t))(2\cos(t) + \sin(t)) \\ (-\ln|\sec(t) + \tan(t)| + 2\sin(t) - \cos(t))\cos(t) - (2\cos(t) + \sin(t))\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\cos(t) - \sin(t))\ln|\sec(t) + \tan(t)| - 3 \\ -\cos(t)\ln|\sec(t) + \tan(t)| - 1 \end{pmatrix}. \textbf{ [0,5 pt]} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución buscada es $X = X_p + X_c$ (**[0,5 pt]**).

Problema 3. a) Clasifique el punto crítico $(0,0)$ del sistema

$$x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$$
$$y' = -x + \frac{1}{2}y.$$

b) Considere el problema

$$x' = -\mu x + y$$
$$y' = -x + \mu y$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Encuentre condiciones sobre μ para que $(0,0)$ sea un centro de este sistema.

Solución Problema 3.
a) Se tiene $\tau = 2$, $\Delta = 1$, y $\tau^2 - 4\Delta = 0$, por lo que debemos saber la dimensión del espacio propio asociado a $\lambda = 1$. Tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el espacio es de dimensión 1 ([**1 pt**]), asi que $(0,0)$ es un nodo impropio ([**1 pt**]) inestable ([**1 pt**]).
b) Para obtener un centro necesitamos $\tau = -\mu + \mu = 0$, lo cual ocurre para cualquier μ ([**1 pt**]). Además es necesario $0 < \Delta = 1 - \mu^2$ ([**1 pt**]), por lo que obtenemos la condición $\mu \in (-1,1)$ ([**1 pt**]).

Problema 4. a) Encuentre y clasifique, en cuanto tipo y estabilidad, los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' &= y^2 - 1 \\ y' &= x^3 - y. \end{cases}$$

b) Considere el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= \epsilon x + y - x(x^2 + y^2) \\ y'(t) &= -x + \epsilon y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{H}$$

donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

i) Use linealización para obtener la mayor información posible respecto al punto crítico $(0, 0)$, en cuanto a tipo y estabilidad, en el caso $\epsilon < 0$, $\epsilon = 0$, y $\epsilon > 0$.

ii) Usando las ecuaciones

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \ , \ \theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

y derivación implícita, muestre que en coordenadas polares el sistema (H) se traduce en

$$\frac{dr}{dt} = r(\epsilon - r^2) \ , \ \frac{d\theta}{dt} = -1.$$

iii) Resolviendo la ecuación diferencial para r, muestre que si $\epsilon = 0$ o $\epsilon < 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$. A partir de esta información, ¿qué puede concluir acerca del tipo y estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ (de (H)) cuando $\epsilon = 0$?

iv) Considere ahora el caso $\epsilon > 0$. Resolviendo la ecuación diferencial, muestre que $\lim_{t\to\infty} r(t) = \sqrt{\epsilon}$. Muestre además que, en coordenadas polares, el círculo $(r(t), \theta(t)) = (\sqrt{\epsilon}, -t)$ es una solución del sistema (esta solución es un ejemplo de un 'ciclo límite').

Solución Problema 4.
a) Los puntos críticos son $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ (**[0,5 pt]**). El Jacobiano es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \ , \ J(-1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \ \textbf{[0,5 pt]}.$$

Vemos que $J(1, 1)$ tiene $\tau = -1$ y $\Delta = -6$, por lo que $(1, 1)$ es un punto silla, inestable (**[0,5 pt]**). Vemos que $J(-1, -1)$ tiene $\tau = -1$ y $\Delta = 6$, de donde se deduce que $(-1, -1)$ es una espiral estable (**[0,5 pt]**).

b)

i) El Jacobiano del sistema es

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \epsilon - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & \epsilon - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

con valores propios complejos conjugados $\lambda_1 = \epsilon + i$ y $\lambda_2 = \epsilon - i$. Luego, si $\epsilon > 0$ el punto crítico tiene el comportamiento de un espiral inestable **[0,25 pts]**, y si $\epsilon < 0$ es un espiral estable **[0,25 pts]**. Si $\epsilon = 0$ entonces puede ser centro o espiral, estable o inestable **[0,5 pts]**.

ii) Tenemos

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

y entonces

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{r}\left(x(\epsilon x + y - x(x^2+y^2)) + y(-x + \epsilon y - y(x^2+y^2))\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(\epsilon x^2 + xy - x^2r^2 + -yx + \epsilon y^2 - y^2r^2\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(\epsilon r^2 - r^4\right) \\ &= r\left(\epsilon - r^2\right). \text{ [0,5 pts]} \end{aligned}$$

Similarmante

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{(y/x)^2+1}\left(\frac{y'x - yx'}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\left(x(-x + \epsilon y - y(x^2+y^2)) - y(\epsilon x + y - x(x^2+y^2))\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\left(-r^2\right) \\ &= -1. \text{ [0,5 pts]} \end{aligned}$$

iii) La EDO es separable. Si $\epsilon < 0$

$$\int 1dt = \int \frac{1}{r(\epsilon - r^2)}dr \Rightarrow t + C = \frac{1}{\epsilon}\int\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{\epsilon - r^2}\right)dr \Rightarrow \ln|r| - \frac{1}{2}\ln\left|\epsilon - r^2\right| = \epsilon t + C \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{r^2-\epsilon}} = Ce^{\epsilon t}.$$

Al despejar r se obtiene

$$r = \sqrt{\frac{-\epsilon C^2 e^{2\epsilon t}}{1 - C^2e^{2\epsilon t}}} \text{ [0,25 pts]}$$

de donde se puede concluir lo deseado.

En el caso $\epsilon = 0$ obtenemos

$$\int 1dt = \int \frac{1}{-r^3}dr \Rightarrow t + C = \frac{1}{2r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{2(t+C)}} \text{ [0,25 pts]}$$

y por lo tanto $\lim_{t\to\infty} r = 0$. Esto quiere decir que cuando $\epsilon = 0$, el origen es un punto crítico del tipo espiral estable **[0,5 pts]**.

iv) Si ahora $\epsilon > 0$ entonces

$$\int 1dt = \int \frac{1}{r(\epsilon - r^2)} dr \Rightarrow \ln|r| - \frac{1}{2}\ln\left|\epsilon - r^2\right| = \epsilon t + C \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{|r^2 - \epsilon|}} = Ce^{\epsilon t}. \textbf{ [0,25 pts]}$$

Al despejar r se obtiene

$$r = \sqrt{\frac{\epsilon D e^{2\epsilon t}}{De^{2\epsilon t} - 1}} \textbf{ [0,5 pts]}$$

de donde se puede concluir lo deseado.

Estas soluciones no contienen el círculo $(\sqrt{\epsilon}, -t)$, el cual es solución pues

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\epsilon} = 0 = \sqrt{\epsilon}(\epsilon - \sqrt{\epsilon}^2) \ , \ \frac{d}{dt}(-t) = -1 \textbf{ [0,25 pts]}$$