Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
13/Abril/2015

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales.
Interrogación 2.

1. Una cable se encuentra suspendido entre dos postes fijos, la ecuación que representa la forma que tiene el cable, está dada por el problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$y(0) = a \quad , \quad y'(0) = 0$$

Determine la curva $y = y(x)$, que representa la forma que tiene el cable.

Solución:

- Haciendo $v = y' \Longrightarrow v' = y''$, se tiene que la ecuación:

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2} \quad (*)$$

se transforma en

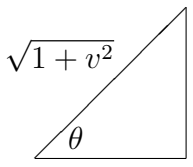
$$v' = \frac{1}{a}\sqrt{1+v^2}$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden separable, cuya solución está dada por:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{dx}{a} + C \quad (**)$$

- Para $I = \int \dfrac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$, hacemos $v = \tan(\theta) \Longrightarrow dv = \sec^2(\theta)\,d\theta$, luego:

$$I = \int \frac{\sec^2(\theta)\,d\theta}{\sec(\theta)} = \int \sec(\theta)\,d\theta = \ln|\,\sec(\theta)+\tan(\theta)| + C_1 = \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right| + C_1$$



$$= \ln\left|\frac{1+\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}}\right| + C_1 = \ln|\,v+\sqrt{1+v^2}\,| + C_1$$

De $(**)$ se tiene:

$$\ln|\,v+\sqrt{1+v^2}\,| = \frac{x}{a} + C$$

Como $y'(0) = 0 \Longrightarrow v(0) = 0$, de donde $C = 0$.

Por lo tanto, se tiene:

$$\ln|\, v+\sqrt{1+v^2}\,| = \frac{x}{a}$$

$$\Longrightarrow v+\sqrt{1+v^2} = e^{x/a}$$

- De aquí:

$$y' + \sqrt{1+(y')^2} = e^{x/a}$$

y como de $(*)$ $\sqrt{1+(y')^2} = a\,y''$, obtenemos:

$$a\,y'' + y' = e^{x/a}$$

que corresponde a una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico es:

$$a\,r^2 + r = 0 \Longrightarrow r(ar+1) = 0 \Longrightarrow r = 0 \ \vee \ r = -\frac{1}{a}$$

de forma que la solución homogénea es :

$$y_c(x) = C_1 \ + C_2\, e^{-x/a}$$

Si suponemos $y_p(x) = A\, e^{x/a}$, reeemplazando en la ecuación obtememos $A = \dfrac{a}{2}$, de donde la solución general es:

$$y(x) = C_1 \ + C_2\, e^{-x/a} + \frac{a}{2}\, e^{x/a}$$

como $y(0) = a \quad , \quad y'(0) = 0$, se obtiene $C_1 = 0$ y $C_2 = \dfrac{a}{2}$, luego la solución buscada es:

$$y(x) = \frac{a}{2}\, e^{-x/a} + \frac{a}{2}\, e^{x/a}$$

2. Un peso de $\frac{1}{4}$ de libra está sujeto a un resorte, para el cual la constante del resorte es $k = 4$ libras por pie. El resorte a su vez está sujeto a un soporte fijo. No hay roce ni amortiguación. En $t = 0$ el peso está quieto y el resorte en su posición de equilibrio; en ese instante se aplica sobre el peso una fuerza externa dada por $F = 3\,\text{sen}(4t)$.

   a) [1 punto] Encuentre las constantes m, k, c y ω para que la ecuación

   $$mx'' = -kx - cx' + \sin(\omega t)$$

   corresponda a la ecuación de movimiento del sistema descrito antes.

   Solución: La ecuación de movimiento del sistema es

   $$\frac{1}{4}x'' + 4x = 3\sin(4t).$$

   De aquí las constantes son $m = \frac{1}{12}$, $c = 0$, $k = \frac{4}{3}$ y $\omega = 4$.

   b) [1 punto] Encuentre las condiciones iniciales que corresponden a la situación descrita arriba.

   Solución: Como el móvil está quieto cuando el resorte está en su posición de equilibrio, $x(0) = x'(0) = 0$.

   c) [3 puntos] Resuelva la ecuación con las condiciones iniciales que encontró en las partes anteriores.

   Solución: Multiplicando la ecuación por 3 obtenemos

   $$x'' + 16x = 12\sin(4t).$$

   Las soluciones del problema homogéneo son $\cos(4t)$ y $\sin(4t)$. Podemos encontrar la solución particular usando variación de parámetros. En este caso el Wronskiano es igual a 1. Con esto $y_p = c_1(t)\cos(4t) + c_2(t)\sin(4t)$, donde las funciones c_1 y c_2 satisfacen

   $$c_1' = -12\sin^2(4t) \;\text{ y}\; c_2' = 12\sin(4t)\cos(4t).$$

   Integrando obtenemos que

   $$y_p(t) = -6\left(t - \frac{\sin(8t)}{8}\right)\cos(4t) + \frac{3}{2}\sin^3(4t) = -6t\cos(4t) + \frac{3}{2}\sin(4t).$$

   Observamos aquí que la segunda función en esta suma es solución de la ecuación homogénea, así que podemos tomar

   $$y_p(t) = -6t\cos(4t).$$

   La solución general de la ecuación es entonces $y(t) = \alpha_1\cos(4t) + \alpha_2\sin(4t) + y_p(t)$. Por último necesitamos ajustar las condiciones iniciales. Imponemos para esto que $y(0) = 0$ y que $y'(0) = 0$. Con la primera condición obtenemos que $\alpha_1 = 0$. Esto dice que

   $$y'(t) = 4\alpha_2\cos(4t) - 6\cos(4t) + 24t\sin(4t).$$

   Esto implica que $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. La solución del problema con condiciones iniciales es

   $$y(t) = \frac{3}{2}\sin(4t) - 6t\cos(4t).$$

   d) [1 punto] Bosqueje el gráfico de la solución que encontró en la parte c y describa el comportamiento de esta función cuando $t \to \infty$.

3. Dada la ecuación diferencial:

$$y'''(x) + y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$$

a) [2 puntos] Determine la solución general, sabiendo que la función $y_1(x) = e^{-x}$ es solución de la ecuación dada.

Solución:
Como la función $y_1(x) = e^{-x}$ es solución de la ecuación, se deduce que $r = -1$ es una raíz del polinomio característico:

$$r^3 + r^2 + 4r + 4 = 0$$

luego dividiendo el polinomio caracter"istico por $(r + 1)$, se tiene:

$$r^3 + r^2 + 4r + 4 = (r + 1)(r^2 + 4) = 0$$

de donde las raíces son

$$r = -1 \quad , \quad r = 2\,i \quad , \quad r = -2\,i$$

Así la solución homogénea es:

$$y_c(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\ \mathrm{sen}(2x) + C_3\,cos(2x)$$

b) [4 puntos] Para $\alpha \in \mathbb{R}$, resuelva la ecuación:

$$y'''(x) + y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = 3\,e^{\alpha\,x}$$

Solución:
La solución homogénea está resuelta en la parte *a*).

Para la solución particular, consideremos los casos

- $\alpha \neq -1$.

  La solución particular es de la forma:

  $$y_p(x) = A\,e^{\alpha\,x}$$

  derivando y reemplazando en la ecuación, se tiene:

  $$\left(A\,\alpha^3 + A\,\alpha^2 + 4\,A\,\alpha + 4\,A\right)\ e^{\alpha\,x} = 3\,e^{\alpha\,x}$$

  $$\Longrightarrow A\,\alpha^3 + A\,\alpha^2 + 4\,A\,\alpha + 4\,A = 3 \Longrightarrow A = \frac{3}{\alpha^3 + \alpha^2 + 4\,\alpha + 4}$$

  Como $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, entonces $\alpha^3 + \alpha^2 + 4\,\alpha + 4 \neq 0$, por lo tanto

  $$y_p(x) = \frac{3\ e^{\alpha\,x}}{\alpha^3 + \alpha^2 + 4\,\alpha + 4}$$

- $\alpha = -1$

  En este caso, la ecuación es de la forma:

$$y'''(x) + y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = 3\,e^{-x}$$

  y además: $3\,e^{-x} \in y_c(x)$, por lo tanto suponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = A\,x\,e^{-x}$$

  derivando y reemplazando en la ecuación, se tiene:

$$5\,A\,e^{-x} = 3\,e^{-x} \Longrightarrow A = \frac{3}{5}$$

  luego:

$$y_p(x) = \frac{3}{5}\,x\,e^{-x}$$

4. Considere la ecuación

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2.$$

a) [4 puntos] Sabiendo que $y_1(x) = x$ es solución del problema homogéneo, encuentre una segunda solución de éste, l.i. con y_1.

solución: Primero dividimos la ecuación por el factor frente a y''. Obtenemos

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 1 + x^2.$$

De aquí el Wronskiano de esta ecuación es

$$W(x) = e^{-\int \frac{-2x}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Con esto, tenemos que

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 1 + x^2.$$

Dividiendo por y_1^2 obtenemos

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1.$$

esto dice que

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{1}{x} + x,$$

de donde $y_2 = -1 + x^2$.

b) [2 puntos] Encuentre una solución particular del problema no homogéneo.

Solución: Para esto usamos variación de parámetros. La solución particular tiene la forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

donde

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W(x)} \text{ y } c_2' = \frac{y_1 f}{W},$$

donde $f(x) = 1 + x^2$. Despejando obtenemos que

$$C_1 = -x + \frac{x^3}{3} \text{ y } c_2 = \frac{x^2}{2}.$$