MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 13)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

En la clase anterior

Iniciamos el estudio de **ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Objetivo: encontrar n soluciones linealmente independientes.

Para encontrar soluciones escribimos la ecuación usando **operadores diferenciales polinomiales**:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y = 0$$

El operador diferencial polinomial tiene asociado un **polinomio característico**:

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

Podemos factorizar el polinomio y el operador diferencial al encontrar las raíces del polinomio

Si $r_1, \ldots, r_n$ son las soluciones de $p(r) = 0$ (algunas repetidas)

$\Leftrightarrow$

Ecuación característica:
$(r - r_n)(r - r_{n-1}) \cdots (r - r_1) = 0$

Reescribimos la ecuación diferencial:
$(D - r_n)(D - r_{n-1}) \cdots (D - r_1) y = 0$

En la clase anterior (continuación)

- **Caso 1. raíces reales distintas**

  Una raíz $r \in \mathbb{R}$ da paso a la solución e^{rx}.

  Solución general $\longrightarrow$ $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$

- **Caso 2. raíces reales, con repetición**

  Una raíz $r \in \mathbb{R}$ con multiplicidad k tiene asociada k soluciones:

  $$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad x^2 e^{rx}, \quad \ldots \quad , x^{k-1} e^{rx}$$

  Solución general:

  $$y(x) = \cdots + \underbrace{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_k x^{k-1}) e^{rx}}_{\text{parte correspondiente a } r} + \ldots$$

Nos falta ver el caso en que el **polinomio característico tiene raíces complejas**.

Recordemos:

Fórmula de Euler: $y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$

$$e^{iy} = \cos(y) + i\text{sen}(y).$$

Exponencial compleja: $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\text{sen}(y)).$$

Función compleja: f, g funciones que toman valores reales,

$$F(x) = f(x) + ig(x)$$

Si $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$, entonces

$$L[F(x)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L[f(x)] = 0 \quad \text{y} \quad L[g(x)] = 0$$

Supongamos que $r = a + ib$ es una raíz del polinomio característico

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0,$$

$\Rightarrow$ su conjugado también lo es: $r = a - ib$

Raíces complejas vienen en pares conjugados: $r = a \pm ib$.

Las soluciones asociadas a las raíces complejas conjugadas son:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\text{sen}(bx));$$
$$e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) - i\text{sen}(bx)).$$

(lo malo es que son **funciones complejas!**)

Recordamos que parte real e imaginaria deben ser soluciones, por lo tanto

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx), \quad y_2(x) = e^{ax}\text{sen}(bx).$$

son **dos soluciones reales l.i.**

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema. [**Raíces complejas no repetidas**]
Si la ecuación característica tiene un par de raíces complejas conjugadas $r = a \pm ib$ con $b \neq 0$, entonces se agrega a la solución general el término

$$e^{ax}(c_1 \cos(bx) + c_2 \text{sen}(bx))$$

Finalmente, si hay **raíces complejas repetidas** se combinan los dos teoremas anteriores.

Teorema. [Raíces complejas repetidas]
Si la ecuación característica tiene un par de raíces complejas conjugadas repetidas, $r = a \pm ib$, $b \neq 0$, con multiplicidad k, entonces se agrega a la solución general el término

$$(c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1}) e^{ax} \cos(bx) + (d_1 + d_2 x + \cdots + d_k x^{k-1}) e^{ax} \text{sen}(bx)$$

Consideremos ahora la **ecuación lineal no-homogénea**

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

Para encontrar la solución general a la ecuación no-homogénea necesitamos:

- la solución general a la ecuación homogénea (**solución complementaria**, $y_c(x)$)
- una **solución particular**, $y_p(x)$, a la ecuación no-homogénea,

Teorema. [**Solución general de la ecuación no-homogénea**]
Sea y_p una solución particular a la EDO no-homogénea en un intervalo $\mathcal{I}$ donde los coeficientes de la ecuación son continuos. Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea. Toda solución de la EDO no-homogénea tiene la forma:

$$Y(x) = \underbrace{c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)}_{y_c(x)} + y_p(x)$$

¿Cómo encontramos una solución particular a la EDO no-homogénea?

Para ecuaciones con coeficientes constantes tenemos el **método de coeficientes indeterminados**.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = f(x)$$

- El método busca adivinar una solución particular dada la forma específica de $f(x)$.
- Solo funciona si f es "suficientemente simple". Puede ser cualquier combinación lineal (finita) de productos de
  1. polinomio en x;
  2. exponenciales e^{rx};
  3. $\cos(kx)$, $\operatorname{sen}(kx)$.

Obs. Todas estas funciones tienes la propiedad de que al ser derivadas se obtienen funciones del mismo tipo!

Método de coeficientes indeterminados

Consideremos $f(x)$ igual a

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \quad \text{o} \quad (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx)$$

Regla 1.

- Obtenemos primero la solución complementaria
- Supongamos que **ningún** sumando de $f(x)$ ni de sus derivadas aparecen en la solución complementaria.
- Tomamos entonces $y_p(x)$ como una combinación lineal de los términos linealmente independientes que aparecen en f y sus derivadas, es decir

$$\begin{aligned} y_p(x) =& (A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \\ &+ (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx) \end{aligned}$$

- Las constantes $A's$ y $B's$ se encuentran usando la ecuación diferencial.

Ejemplo. Resolver $(D-1)(D-2)y = 3xe^{-x}$

Notar que si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, es posible separar le ecuación $L[y] = f$ en varias partes, ya que

$$\text{si} \quad L[y_1] = f_1, \quad L[y_2] = f_2 \quad \Rightarrow \quad L[y_1 + y_2] = f_1 + f_2 = f\,.$$

Ejemplo. Resolver $\quad y'' - 3y' + 2y = 3xe^{-x} - 10\cos(3x)$

Método de coeficientes indeterminados

Para $f(x)$ igual a

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \quad \text{o} \quad (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx)$$

Regla 2.

- Obtener primero la solución complementaria
- Supongamos que **algunos** términos de $f(x)$ o de sus derivadas aparecen en la solución complementaria.
- Tomamos entonces $y_p(x)$ como la respuesta de la Regla 1 multiplicada por una potencia x^s, es decir,

$$\begin{aligned} y_p(x) =& x^s(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{rx}\cos(kx) \\ &+ x^s(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{rx}\text{sen}(kx) \end{aligned}$$

Exponente s: es el menor número natural tal que ningún sumando en y_p es solución de la EDO homogénea.

Ejemplo. Resolver $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos(2x)$