PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2016.

MAT 1640. Interrogación 1.

1. Considere el problema de valor inicial:

$$(x-2)y' = y^2 - 1 \quad y(x_0) = y_0$$

Solución:
Observe que la ecuación propuesta es de variables separables, por lo que al resolverla tenemos que:

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{(x-2)}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \frac{1 + C(x-2)^2}{1 - C(x-2)^2}$$

Además tenemos la solución singular $y = -1$.

a) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema tiene solución única y ecuéntrela.
Solución:
Observe que el Teorema de Existencia y Unicidad garantiza la existencia y unicidad del problema de valor inicial siempre que $x_0 \neq 2$. En tal caso la solución está dada por la forma general con $C = \dfrac{y_0 - 1}{(y_0+1)(x_0-2)^2}$. Adems para la $x_0 = 2$ e $y_0 = -1$ la única solución es la solución singular $y = -1$.

b) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema tiene más de una solución y exhiba por lo menos dos.
Solución:
Observe que si $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ el problema tiene infinitas soluciones, ya que para todo C la solución general cumple con está condición inicial.

c) Determine para qué valores de x_0 e y_0 el problema no tienen solución.
Solución:
Observe que si $x_0 = 2$ e $y_0 \neq 1, -1$ no existe solución, esto se ve reemplazando directamente dichos valores en la ecuación planteada.

Distribución de puntaje:

- Por cada inciso 1pto por justificación y otro punto por los puntos adecuados.

2. a) Resuelva la ecuación $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$

Solución:

SI $M = y^2 + 2xy$ y $N = -x^2$ observe que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y + 2x$ y que $\dfrac{\partial N}{\partial y} = -2x$ por lo tanto la ecuación no es exacta, sin embargo

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{2}{y}$$

por lo que la ecuación permite factor integrante de la forma $\mu(y) = y^{-2}$, usando este factor obtenemos la ecuación exacta:

$$(1 + 2xy^{-1})dx + (x^2y^{-2})dy = 0$$

por lo que la solución general de la ecuación original está dada por:

$$x + x^2y^{-1} = C$$

Además tenemos la solución $y = 0$.

Distribución de puntaje:

- Por ver que no es exacta 0,5 puntos, pero que admite factor integrante 1 punto
- Por resolver la exacta correctamente 1 puntos
- Por indicar que $y = 0$ es solución 0.5 puntos.

b) Resuelva el problema de valor inicial $y' + y = e^xy^{-2}$ con $y(0) = 2$

Solución:

Para resolver esta ecuación de Bernoulli hacemos la sustitución $v = y^3$ obteniendo la ecuación lineal

$$v' + 3v = 3e^x$$

cuya solución general es $v = \dfrac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}$, por lo que la solución general de la ecuación original es

$$y(x) = \left(\frac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

por lo tanto el problema de valor inicial planteado tiene por solución la curva

$$y(x) = \left(\frac{3}{4}e^x + \frac{29}{4}e^{-3x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Distribución de puntaje:

- Por hacer la sustitución adecuada con $v' = 3y^2y'$ 1 punto
- Por resolver la ecuación 1 punto
- Por volver a la variable original y encontrar la constante C 1punto

3. Un estanque de 500 litros de capacidad contiene 100kg de sal disueltos en 200 lt de agua. Se comienza a verter salmuera, con una concentración de 250 gr de sal por litro de agua, a razón 10 litros por minuto, mientras que del estanque está saliendo salmuera a razón 4 litros por minuto. Encuentre la cantidad de sal que hay en el estanque una hora después de comenzado el proceso.

Solución:

Si $x(t)$ la cantidad, en kilos, de sal que hay en el estanque después de t minutos de comenzado el proceso, tendremos que:

$$x'(t) = 2,5 - \frac{4x(t)}{200 + 6t}$$

para $t \leq 50$, ya que a los 50 minutos se llena el estanque. Dicha ecuación tiene solución general

$$x(t) = \frac{C}{(3t + 100)^{\frac{2}{3}}} + \frac{3t}{2} + 50$$

Como en principio habían 100 kilos de sal tenemos que $C = 100^{\frac{2}{3}} \cdot 50$, por lo tanto después de 50 minutos comenzado el proceso habrán

$$x(50) = K_{50} = (2/5)^{\frac{2}{3}} + 125 \text{ kilos de sal en el estanque}$$

A partir de los 50 primeros minutos el modelo cambia porque el estanque se rebalsa, y queda

$$x'(t) + \frac{x(t)}{50} = 2,5$$

cuya solución es: $x(t) = 125 + De^{-0,02t}$, como $x(0) = K_{50}$, tenemos que $D = K_{50} - 125$.

Por lo tanto después de 60 minutos comenzado el proceso la cantidad de sal será $125 + (K_{50} - 125)e^{-0,2}$ kilos.

Distribución de puntaje:

- Por encontrar el modelo para $t < 50$ 1,5 puntos
- Por resolver el modelo anterior 1 punto
- Por determinar constantes del modelo anterior 0,5 puntos por c/u
- Por encontrar el modelo para $t > 50$ 1 punto
- Por resolver el modelo anterior 1 punto
- Por determinar la cantidad de sal 0,5 puntos

4. a) Considere la ecuación $y'(x) = y(y-1)^2(y+2)$. Determine todos los puntos de equilibrio y clasifíquelos en sumidero, fuente o nodo.

Solución:

Los puntos de equilibrio son $y = -2$, $y = 0$ e $y = 1$. Haciendo estudio de signos tenemos lo siguiente:

$y' > 0$ si $y > 0$ o $y < -2$ e $y' < 0$ si $-2 < y < 0$. por lo tanto:

$y = -2$ es sumidero.

$y = 0$ es fuente.

$y = 1$ es nodo.

Distribución de puntaje:

- Por la calsificación de cada punto de equilibrio 1 punto.

b) Utilice la sustitución $y = vx^2$ para resolver la ecuación

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

Solución:

Haciendo la sustitución sugerida obtenemos que $y' = v'x^2 + 2vx$ obteniendo la ecuación:

$$v'x^2 = \cos(v)$$

esta ecuación es de variable separables por lo que necesitamos resolver:

$$\int \sec(v)dv = \int x^{-2}dx$$

obteniendo la solución general:

$$\ln|\sec(v) + \tan(v)| = -x^{-1} + C$$

volviendo a la variable original tenemos

$$\ln|\sec(y/x^2) + \tan(y/x^2)| = -x^{-1} + C$$

Distribución de puntaje:

- Por transformar correctamente la ecuación 1 punto
- Por resolver correctaemnte la ecuación en v 1 punto
- Por dar la solución en la variableoriginal 1 punto.