PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2018.

INTERROGACIÓN 1
ECUACIONES DIFERENCIALES ⋆ MAT1640

La siguiente evaluación consta de 4 preguntas. Dispone de 120 minutos para responderla.

1. *a*) Considere el problema de valor inicial,

$$(1+x^2)y' + 2xy = f(x), \qquad y(0) = 0.$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1), \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine, en caso que exista, una solución continua para esta ecuación.

b) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y^2}{2y}, \qquad y(0) = 1.$$

y determine el máximo intervalo donde este definida la solución.

2. En una red de computadores sea $x(t)$ la cantidad de máquinas infectadas con el virus MTA0164 en un instante dado. Si $x'(t)$ denota la rapidez de propagación en la red se sabe que que:

$$x'(t) = \alpha\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{2}{3} - x\right)(1-x), \quad x(0) = x_0$$

donde α es una constante positiva y x_0 es la proporción de computadores infectados inicialmente.

a) Encuentre las soluciones de equilibrio y grafique el respectivo diagrama.

b) Pruebe que si $0 < x_0 < 2/3$ entonces el virus alcanzará finalmente un tercio del total.

c) Para que valores de x_0 se infectará la totalidad de los equipos.

3. Considere un estanque de agua de 1000 litros en el cual comienza a fluir una solución de sal a $6L/min$. Si la concentración de sal entrante es $0,1kg/L$ y se sabe que la mezcla resultante sale del estanque a velocidad $5L/min$.

   a) Determine, $x(t)$, la concentración de sal en el estanque como función del tiempo.

   b) Determine el tiempo t_0 tal que $x(t_0) = 1000$.

   c) Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

4. *a*) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Muestre que la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + x^n y^m f(y/x),$$

   se transforma en una ecuación de variables separables, usando el cambio de variable $y = vx$.

   b) Utilice lo anterior para resolver la ecuación,

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{sec^2(y/x)}{y^2}.$$

UNA SOLUCIÓN

1. *a*) En primer lugar resolvemos el problema de valor inicial, es decir,

$$(1+x^2)y' + 2xy = x,$$

o una vez normalizado,

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2},$$

la cual es una ecuación lineal, que podemos resolver multiplicando por

$$\mu(x) = 1 + x^2,$$

con lo cual obtenemos

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

e imponiendo la condición inicial se tiene que

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

es la solución para $x \in [0,1)$. Pasamos a analizar para x en $[1,\infty)$ en este caso se tiene que

$$(1+x^2)y' + 2xy = 0,$$

procediendo de manera analoga, obtenemos

$$y(x) = \frac{C}{1+x^2},$$

ahora por la condición de continuidad pedida, debe tenerse que

$$\lim_{x\to 1^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x),$$

para que esto se verifique se tiene que $C = \frac{1}{2}$, lo cual la solución continua buscada es:

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1), \\ \\ \dfrac{1}{2(1+x^2)} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Comencemos escribiendo la ecuación dada como:

$$(x+y^2)dx - 2ydy = 0.$$

Notamos que si $M(x,y) = x + y^2, \quad N(x,y) = -2y$ entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \neq 0,$$

por lo tanto la ecuación dada no es exacta, sin embargo,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -1,$$

es decir podemos multiplicar por el factor integrante

$$\mu(x) = e^{-x},$$

para convertirla en,

$$e^{-x}(x + y^2)dx - 2ye^{-x}dy = 0,$$

la cual tiene por solución,

$$F(x,y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + C,$$

imponiendo la condición inicial se tiene que $C = 2$, es decir la curva

$$-xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + 2 = 0,$$

satisface el problema de valor inicial dado. Finalmente notamos que es posible despejar,

$$y(x) = \sqrt{2e^x - x - 1},$$

y la expresión $h(x) = 2e^x - x - 1$ es siempre positiva ya que su mínimo lo alcanza en $h(-ln(2)) = \ln(2) > 0$. Se concluye que el máximo intervalo donde está definido la función es $(-\infty, \infty)$.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1,5 punto por resolver la ecuación lineal para $x \in [0,1)$.
- a) Asignar 1 punto por resolver el caso $x \geq 1$.
- a) Asignar 0.5 punto por encontrar de manera correcta la condición de continuidad.
- b) Asignar 1 punto por verificar el que la ecuación es (o no) de tipo exacta.
- b) Asignar 1 punto por calcular el factor integrante y resolver correctamente.
- b) Asignar 1 punto por encontrar la curva particular que resuelve el problema de valor inicial junto con el intervalo donde está definida.

2. Comencemos analizando el signo de la función

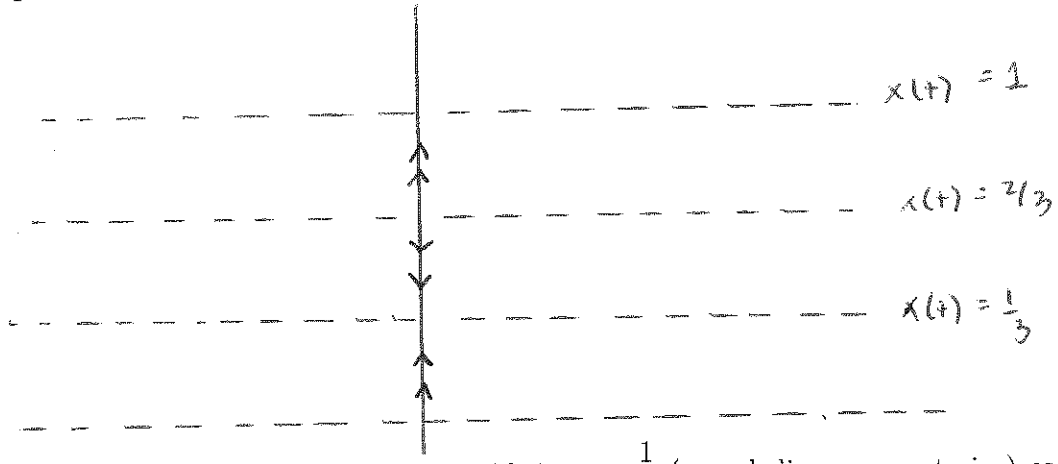
$$f(x) = \alpha \left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{2}{3} - x\right)(1 - x),$$

	$(0,1/3)$	$(1/3,2/3)$	$(2/3,1)$
$(1/3-x)$	$+$	$-$	$-$
$(2/3-x)$	$+$	$+$	$-$
$(1-x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Se tiene que las soluciones de equilibrio corresponden a

$$x(t)=\frac{1}{3},\quad x(t)=\frac{2}{3},\quad x(t)=1.$$

En particular el respectivo diagrama de fase es:



Por otro lado como la solución de equilibrio $x=\frac{1}{3}$ (por el diagrama anterior) es de tipo atractor, para cualquier solución en el intervalo $(0,2/3)$ la solución convergen a $x=\frac{1}{3}$

Finalmente para cualquie condición inicial con $2/3<x<1$ la cantidad de infectados será total.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por el análisis de los signos de f.
- Asignar 2 puntos por el diagrama de fase realizado de manera correcta.
- Asignar 1 punto por argumentar de manera correcta respecto de la condición para $x\in(0,2/3)$.
- Asignar 1 punto por argumentar y responder de manera correcta respecto de la condición $x\in(2/3,1)$

3. Denotemos por $Q=Q(t)$ la cantidad de sal en el estanque en tiempo t. Según los datos del problema

$$\frac{dQ}{dt}=0,6-\frac{5Q}{1000+t},\qquad Q(0)=0.$$

La cual es una ecuación lineal que tiene por solución,

$$Q(t) = 0,1(1000 + t) + C(1000 + t)^{-5}.$$

y por la condición inicial $C = -0,1(1000)^6$. De donde se obtiene que la concentración pedida es,

$$x(t) = \frac{Q(t)}{1000 + t} = 0,1[1 - (1000)^6(1000 + t)^{-6}].$$

En particular se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,1.$$

Si se asume que se produce rebalse del estanque, esto ocurre en tiempo t_0 tal que

$$1000 + t_0 = 1000,$$

es decir $t_0 = 0$.

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1.5 puntos por determinar de manera correcta la ecuación lineal que determina la cantidad de sal en cada instante en el estanque.

b) Asignar 1.5 puntos por resolver de manera correcta y encontrar $Q(t)$.

c) Asignar 1 punto por la condición inicial y determinar el valor de la constante C.

d) Asignar 1 punto por plantear la relación $x(t) = 1000$. No es necesario resolver

e) Asignar 1 punto por calcular $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

f) En caso que el alumno resuelva el problema considerando rebalse. Los dos item anteriores se cancelan y se le entregan 2 puntos por decir que el rebalse se produce en $t = 0$.

4. Antes de hacer el cambio de variables sugerido notamos que

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx},$$

con lo cual la ecuación dada queda como:

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + x^{n+m-1}v^m f(v),$$

o bien

$$\frac{dv}{v^m f(v)} = x^{n+m-1}dx,$$

la cual es separable.

En el caso de la ecuación dada, tenemos que

$$m = 0, n = -2, \quad f(v) = \sec^2(v),$$

con lo cual despues del cambio de variable se obtiene,

$$\frac{dv}{v^{-2}\sec^2(v)} = x^{-3}dx,$$

la cual tiene por solución

$$\frac{1}{6}v^3 + \left(\frac{v^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\operatorname{sen}(2v) + \frac{v}{4}\cos(2v) = \frac{-x^2}{2} + C,$$

y volviendo a las variables originales, se tiene que la solución buscada $y = y(x)$ satisface,

$$4y^3 + 3x(2y^2 - x^2)\operatorname{sen}(2y/x) + 6x^2y\cos(2y/x) + 12x = Cx^3.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1.5 puntos por realizar de manera correcta el cambio de variable.
- a) Asignar 1.5 puntos por expresar la ecuación como una ecuación de variable separables.
- b) Asignar 1 punto por utilizar de manera correcta el cambio de variable sugerido.
- b) Asignar 2 puntos por encontrar de manera correcta la solución pedida.