Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
12 de enero de 2016

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Interrogación N° 1

1. Encuentre la solución general de

   a) $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{2x}{t} = t^2 \operatorname{sen}(3t)\,.$

   Respuesta : Es una *ecuación lineal* con

   $$P(t) = -\frac{2}{t}\,; \quad Q(t) = t^2 \operatorname{sen}(3t)\,.$$

   Su solución general viene dada por

   $$x(t) = e^{-\int P(t)\,dt}\left(C + \int Q(t) e^{\int P(t)\,dt}\,dt\right).$$

   Tenemos que

   $$\int P(t)\,dt = -\int \frac{2}{t}\,dt = \ln(t^{-2})$$

   y que

   $$\int Q(t) e^{\int P(t)\,dt}\,dt = \int t^2 \operatorname{sen}(3t) e^{\ln(t^{-2})}\,dt = \int \operatorname{sen}(3t)\,dt = -\frac{\cos(3t)}{3}\,.$$

   Por tanto, la solución general es

   $$x(t) = t^2\left(C - \frac{\cos(3t)}{3}\right).$$

   b) $(x^2t + t^2x)\dfrac{dx}{dt} = x^3 + t^3$

   Respuesta : Dividiendo obtenemos

   $$\frac{dx}{dt} = \frac{x^3 + t^3}{x^2t + t^2x}$$

   y vemos que se trata de una *ecuación de coeficientes homogéneos.*
   Hacemos, pues, el cambio de variables

   $$x(t) = ty(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 + t^3}{x^2t + t^2x} = \frac{y^3 + 1}{y^2 + y} \quad \text{y} \quad x'(t) = ty'(t) + y(t).$$

Sustituyendo la ecuación se transforma en

$$ty' \;=\; \frac{y^3 \,+\, 1}{y^2 \,+\, y} \,-\, y \qquad \Rightarrow \qquad y' \;=\; \frac{1 \,-\, y^2}{t\,(y^2 \,+\, y)}\,,$$

la cual es separable y su solución general viene dada por

$$\int \frac{y^2 \,+\, y}{1 \,-\, y^2}\,dy \;=\; \int \frac{dt}{t} \qquad \Rightarrow \qquad y \,+\, \ln|1 - y| \;=\; -\ln|t| \,+\, C.$$

Finalmente, reemplazando por la variable original, x y simplificando, llegamos a la solución

$$\frac{x}{t} \,+\, \ln|t - x| \;=\; C.$$

2. Resuelva el Problema de Valor Inicial

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\,\frac{1}{x+y+1}\,; \qquad y(2) \;=\; 1.$$

Solución : La ecuación diferencial que satisface la curva es

$$\underbrace{1}_{M(x,y)}\cdot dx \;+\; \underbrace{(x+y+1)}_{N(x,y)}\cdot dy \;=\; 0,$$

la cual no es exacta ya que $N_x - M_y \;=\; 1-0 \;=\; 1 \;\neq\; 0.$

Como $\frac{N_x - M_y}{M} \;=\; 1,$ es independiente de $x,$ la ecuación admite un factor integrante $\mu(y)$ de la variable y solamente. En dicho caso se debe verificar que

$$\mu(y) \;=\; \mu'(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) \;=\; e^y\,.$$

Así, multiplicamos la ecuación original por e^y obteniendo la ecuación exacta

$$e^y\,dx \;+\; e^y(x+y+1)\,dy \;=\; 0,$$

la cual tiene solución general $F(x,y) \;=\; C,$ siendo $F(x,y)$ una función tal que

$$F_x \;=\; e^y \quad (1)\,; \quad \& \quad F_y \;=\; e^y(x+y+1) \quad (2)\,.$$

Tenemos que

$$(1) \quad \Rightarrow \quad F \;=\; xe^y \;+\; \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad F_y \;=\; xe^y \;+\; \varphi'(y) \;=\; xe^y \;+\; (y+1)e^y,$$

por la ecuación (2). Luego,

$$\varphi'(y) \;=\; (y+1)e^y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) \;=\; ye^y$$

y de este modo, la solución general de la ecuación es

$$(x+y)\,e^y \;=\; C.$$

Finalmente elegimos C para que la curva pase por el punto $(2,1)$:

$$(2+1)e^1 \;=\; C \;=\; 3e.$$

De este modo, la ecuación de la curva buscada es

$$(x+y)\,e^y \;=\; 3e \quad \square$$

3. Un modelo para la población $P(t)$ de un suburbio en una gran ciudad está descrito por el problema de valores inciales

$$\frac{dP}{dt} \;=\; 10^{-7}P\,(10^6 \,-\, P)\;; \qquad P(0) \;=\; 5000$$

donde t se expresa en meses. Encuentre la ecuación para la función $P(t)$. ¿A qué valor límite tiende la población cuando $t \to \infty$?

Solución : La ecuación es de variables separables:

$$\frac{dP}{P(10^6 - P)} \;=\; 10^{-7}dt \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dP}{P(10^6 - P)} \;=\; 10^{-7}\int dt \,+\, C.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{P(10^6 - P)} \;=\; 10^{-6}\left(\frac{1}{P} \,-\, \frac{1}{10^6 - P}\right),$$

De modo que

$$10^{-7}t \,+\, C \;=\; 10^{-6}\int\left(\frac{1}{P} \,-\, \frac{1}{10^6 - P}\right) \;=\; 10^{-6}\ln\left(\frac{P}{10^6 - P}\right).$$

de donde,

$$\frac{P}{10^6 - P} \;=\; Ae^{t/10} \qquad (\text{donde} \quad A \,=\, e^{10^6 C})$$

sustituyendo $P(0) = 5000$ resulta

$$\frac{5000}{10^6 - 5000} \;=\; A \qquad \Rightarrow \qquad A \;=\; \frac{1}{199} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{10^6 - P} \;=\; \frac{1}{199}\,e^{t/10}$$

Despejando de allí obtenemos finalmente

$$P(t) \;=\; \frac{\frac{10^6}{199}\,e^{t/10}}{1 \,+\, \frac{1}{199}\,e^{t/10}} \;=\; \frac{1{,}000{,}000}{1 + 199e^{-t/10}}\,.$$

Y vemos entonces que

$$\lim_{to\infty} P(t) \;=\; \lim_{to\infty} \frac{1{,}000{,}000}{1 + 199e^{-t/10}} \;=\; 1{,}000{,}000 \qquad (1 \text{ millón de personas})\,.$$

4. a) Exhiba dos soluciones distintas del P.V.I.

$$x'(t) \;=\; t^{5/3}(x+1)^{2/3}\;; \qquad x(0) \;=\; -1.$$

Explique por qué ello no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad.

Respuesta : Por un lado tenemos la función constante $x(t) = -1 \;\forall t$, la cual es solución del problema planteado.

Ahora, si $x \neq -1$ obtenemos la ecuación separable

$$\frac{dx}{(x+1)^{2/3}} \;=\; t^{5/3}\,dt$$

la cual, integrada, resulta en

$$3(x+1)^{1/3} \;=\; \frac{3}{8}\,t^{8/3} + C.$$

Usando la condición inicial obtenemos $C = 0$.

Sustituyendo y despejando obtenemos

$$x \;=\; -1 + \frac{t^8}{2}\,.$$

Ambas soluciones son, obviamente, diferentes.
La razón por la cual esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad es que la función $f(x,t) = t^{5/3}(x+1)^{2/3}$ no posee allí derivada parcial continua respecto a x, pues $f_x(x,t) = \dfrac{2t^{5/3}}{3\,(x+1)^{1/3}}$ la cual es discontinua en $(x,\,t) = (0,\,1)$.

De este modo, el T.E.U. no opera en dicho punto y por ello no hay contradicción.

b) Encuentre todos los puntos de equilibrio de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} \;=\; x^4 \,-\, x^3 \,-\, 2x^2$$

y determine su estabilidad. ¿Cuáles son atractores (sumideros) y cuáles repulsores (fuentes)?

Respuesta : Si $F(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - x - 2)$, tenemos que los puntos críticos son las soluciones de la ecuación $F(x) = 0$.

$$\text{Vemos que} \quad F(x) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2(x-2)(x+1) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; -1,\,0,\,2.$$

Como $F'(x) = x(4x^2 - 3x - 4)$ tenemos que

- $F'(-1) = -3 < 0$ por lo cual $x = -1$ es un sumidero (atractor)
- $F'(2) = 12 > 0$ por lo cual $x = -1$ es una fuente (repulsor)

El criterio no sirve en $x = 0$ pues $F'(0) = 0$ pero, como F es negativa a ambos lados de ese punto, tenemos que $x = 0$ es tipo nodo (no atractor ni repulsor)

El punto $x = -1$ es un punto de equilibrio estable y los puntos $x = 0$ y $x = 2$ son ambos equilibrios inestables.