Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
28 de enero de 2013

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Interrogación N° 3

1. Determine la solución general del sistema lineal $\vec{x}\,' = \mathbf{A}\,\vec{x}$, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La solución general viene dada por $\vec{x} = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c}$, donde $\mathbf{\Phi}(t)$ es alguna matriz fundamental y $\vec{c}$, un vector de constantes arbitrarias.

Como el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es $p(\lambda) = (1-\lambda)^3$, la matriz tiene un único valor propio: $\lambda = 1$ y usamos $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

Por el Teorema de Cayley–Hamilton, $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3 = \mathbf{0}$

Escribimos pues, $e^{\mathbf{A}t} = e^{\{\mathbf{I}t + (\mathbf{A}-\mathbf{I})t\}}$ y, como la matriz $\mathbf{I}t$ conmuta con cualquier otra, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{I}t}e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t} = e^{t}e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t}.$$

Ahora bien,

$$e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t} = \mathbf{I} + t\,(\mathbf{A}-\mathbf{I}) + \frac{t^2}{2}\,(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2,$$

ya que $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^n = \mathbf{0}$ para $n \geq 3$. Esto es,

$$e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t & t & t \\ t & 1+t & t \\ -2t & -2t & 1-2t \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\vec{x} = e^{\mathbf{A}t}\,\vec{c} = \begin{bmatrix} (1+t)e^t & te^t & te^t \\ te^t & (1+t)e^t & te^t \\ -2te^t & -2te^t & (1-2t)e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad \square$$

2. Si el sistema homogéneo de orden dos $\vec{x}\,' = \mathbf{A}\,\vec{x}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ posee matriz fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{pmatrix},$$

use el método de variación de parámetros para hallar la solución del problema de valores inciales

$$\vec{x}\,'(t) \;=\; \mathbf{A}\,\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \vec{x}(0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Respuesta : Como $\mathbf{\Phi}(t)$ es matriz fundamental del sistema, y éste satisface la condición inicial

$$\vec{x}(0) \;=\; \vec{x}_0 \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces la solución general del P.V.I viene dada por

$$\vec{X}\,(t) \;=\; \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}(0)^{-1}\,\vec{x}_0 \;+\; \mathbf{\Phi}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\,\vec{E}\,(s)\,ds,$$

donde $\vec{E}\,(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos que

$$\mathbf{\Phi}(t)^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & 3e^{t} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

de lo cual obtenemos

$$\mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}(0)^{-1}\,\vec{x}_0 \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3e^{t} + e^{-t} \\ -e^{t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\,\vec{E}\,(s)\,ds \;=\; \frac{1}{2}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} - e^{-s} \\ -e^{3s} + 3e^{s} \end{pmatrix} ds \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} + e^{-t} - 2 \\ 3e^{t} - \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

obteniendo finalmente,

$$\vec{X}\,(t) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3e^{t} + e^{-t} \\ -e^{t} + e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} + e^{-t} - 2 \\ 3e^{t} - \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \;\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9e^{t} - \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{2t} + 6 \\ \\ -3e^{t} - \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} + 4 \end{pmatrix} \quad \square$$

3. Calcule la linealización del sistema

$$x'(t) \;=\; 7x \,-\, x^2 \,-\, 2xy$$

$$y'(t) \;=\; 5y \,-\, xy \,-\, y^2\,.$$

en cada uno de sus puntos de equilibrio y en base a ella estudie la estabilidad de cada uno de ellos.

Solución : Sean $f(x,y) \;=\; 7x \,-\, x^2 \,-\, 2xy; \qquad g(x,y) \;=\; 5y \,-\, xy \,-\, y^2.$

Los puntos críticos del sistema son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x\,(7 \,-\, x \,-\, 2y) &\;=\; 0 \\ y\,(5 \,-\, x \,-\, y) &\;=\; 0. \end{aligned}$$

De allí obtenemos los puntos

$$P_1 \;=\; (0,\,0); \qquad P_2 \;=\; (0,\,5); \qquad P_3 \;=\; (7,\,0); \qquad P_4 \;=\; (3,\,2).$$

La linealización en un punto $(x_0,\,y_0)$ es el sistema lineal homogéneo $\vec{x}\,' \;=\; A\,\vec{x}$,

con matriz $A \;=\; \left(\begin{array}{cc} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{array}\right)\Big|_{(x_0,\,y_0)}$.

Como

$$f_x(x,\,y) \;=\; 7 - 2x - 2y; \qquad f_y(x,\,y) \;=\; -2x; \qquad g_x(x,\,y) \;=\; -y; \qquad g_y(x,\,y) \;=\; 5 - x - 2y,$$

tenemos los siguientes casos:

- En P_1 se tiene $A \;=\; \left(\begin{array}{cc} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{array}\right)$ con valores propios $\lambda_1 \;=\; 5;\; \lambda_2 \;=\; 7.$

  Como $\lambda_1,\; \lambda_2 > 0,$ tenemos que **el equilibrio en** $P_1 = (0,0)$ **es inestable.**
- En P_2 tenemos $A \;=\; \left(\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ -5 & -5 \end{array}\right)$ con valores propios $\lambda_1 \;=\; -5;\; \lambda_2 \;=\; -3.$

  Como $\lambda_1,\; \lambda_2 < 0,$ tenemos que **el equilibrio en** $P_2 = (0,5)$ **es asintóticamente estable.**
- En P_3 se tiene $A \;=\; \left(\begin{array}{cc} -7 & -14 \\ 0 & -2 \end{array}\right)$ con valores propios $\lambda_1 \;=\; -7;\; \lambda_2 \;=\; -2.$

  Como $\lambda_1,\; \lambda_2 < 0,$ tenemos que **el equilibrio en** $P_3 = (7,0)$ **es asintóticamente estable.**
- En P_4 se tiene $A \;=\; \left(\begin{array}{cc} -3 & -6 \\ -2 & -2 \end{array}\right)$ con valores propios $\lambda_1 \;=\; -6;\; \lambda_2 \;=\; 1.$

  Como $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0,$ tenemos que **el equilibrio en** $P_4 = (3,2)$ **es inestable.** $\square$