Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2026

MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias
Interrogación 2

1. **(6 pts)** Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0,$$

sabiendo que $y_1(x) = x^2$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Solución.

Sea $x > 0$. Determinamos una segunda solución y_2 para la ecuación homogénea asociada

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,$$

usando la **fórmula de Abel**, tal que

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{\int \frac{3}{x}\,dx}}{(y_1(x))^2} \\ &= x^2 \int \frac{dx}{x} \\ &= x^2 \ln x. \end{aligned}$$

Entonces la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x, \quad x > 0, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Reescribimos la ecuación no homogénea de forma estándar tal que

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = \ln x, \quad x > 0.$$

Usamos el método de variación de parámetros para determinar una solución particular para esta ecuación de la forma

$$y_p(x) = \alpha_1(x)x^2 + \alpha_2(x)x^2 \ln x,$$

donde

$$\alpha_1(x) = \int \frac{W_1}{W}, \quad \alpha_2(x) = \int \frac{W_2}{W}$$

y tales que

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & x(2\ln x + 1) \end{vmatrix} = x^3,$$
$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \ln x \\ \ln x & x(2\ln x + 1) \end{vmatrix} = -x^2(\ln x)^2,$$
$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \ln x \end{vmatrix} = x^2 \ln x.$$

Por lo tanto,

$$\alpha_1(x) = -\int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(\ln x)^3,$$
$$\alpha_2(x) = \int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2,$$

y luego la solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3,$$

y por lo tanto la solución general es

$$y(x) = x^2(c_1 + c_2 \ln x) + \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Asignación de puntaje

- Asignar **(1 pt)** por usar la fórmula de Abel.
- Asignar **(1 pt)** por obtener correctamente la segunda solución y_2 de la ecuación homogénea.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar la solución general de la la ecuación homogénea.
- Asignar **(2.5 pt)** por determinar una solución particular repartidos de la siguiente forma
  - **(0.5 pt)** para calcular el wronskiano W,
  - **(0.5 pt)** para calcular el wronskiano W_1,
  - **(0.5 pt)** para calcular el wronskiano W_2,
  - **(0.5 pt)** para calcular α_1,
  - **(0.5 pt)** para calcular α_2.
- Asignar **(1 pt)** por expresar correctamente la solución general de la la ecuación no homogénea.

2. **(6 pts)** Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = (a^2 + 2a + 2)\mathrm{e}^{at} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Resuelva este PVI y determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la solución sea acotada cuando $t \to +\infty$.

(b) Transforme explícitamente esta ecuación diferencial en un sistema lineal diferencial de primer orden.

Solución.

(a) Como el polinomio característico es $r^2 + 2r + 2$ tiene dos raíces complejas conjugadas $-1 \pm i$ entonces la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$y_0(t) = \mathrm{e}^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

y notemos que $\lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0$. Por otra parte, como $a \in \mathbb{R}$ entonces a nunca es raíz del polinomio característico y por lo tanto, buscamos una solución particular de la forma $y_p(t) = A\mathrm{e}^{at}$. Remplazando en la ecuación, obtenemos $A = 1$ y luego $y_p(t) = \mathrm{e}^{at}$ y usando las condicione iniciales $y(0) = y'(0) = 0$ nos permite deducir que $c_1 = -1$ y $c_2 = -(a + 1)$. Luego, la solución del PVI está dada por

$$y(t) = \mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{-t}\Big(\cos t + (a + 1)\sin t\Big),$$

donde el comportamiento límite cuando $t \to +\infty$ está determinado por el término e^{at} porque

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\Big(\cos t + (a + 1)\sin t\Big) = 0.$$

Por lo tanto, la solución es acotada si y sólo si $a \leq 0$.

(b) Sea $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = y'. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} u_1' = y' = u_2, \\ u_2' = y'' = -2y' - 2y + (a^2 + 2a + 2)\mathrm{e}^{at} = -2u_2 - 2u_1 + (a^2 + 2a + 2)\mathrm{e}^{at}, \end{cases}$$

y obtenemos el sistema lineal $U'(t) = AU(t) + g(t)$, donde

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (a^2 + 2a + 2)\mathrm{e}^{at} \end{pmatrix},$$

con condición inicial $U(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por resolver correctamente la ecuación característica asociada a la ecuación homogénea.
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar correctamente la solución general de la ecuación homogénea.
- Asignar **(0.5 pt)** por justificar que a no es raíz y proponer una solución particular de la forma $y_p(t) = Ae^{at}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por obtener solución $y_p(t) = e^{at}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por aplicar las condiciones iniciales y calcular correctamente las constantes $c_1 = -1$ y $c_2 = -(a+1)$.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar correctamente la solución del PVI.
- Asignar **(1 pt)** por establecer que la solución es acotada si y solo si $a \leq 0$.

(b)
- Asignar **(0.5 pt)** por considerar las nuevas variables $u_1 = y$ y $u_2 = y'$.
- Asignar **(1 pt)** por determinar correctamente el nuevo sistema diferencial.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresarlo de forma matricial $U'(t) = A(t)U(t)+g(t)$.

3. (a) **(3 pts)** Construya una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 4 y con coeficientes constantes que tenga por solución general

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 \sin(3x) + c_4 \cos(3x),$$

donde c_1, c_2, c_3, c_4 son constantes reales.

(b) **(3 pts)** Considere las funciones

$$f_1(t) = t^2|t|, \qquad f_2(t) = t^3.$$

(i) Determine si f_1 y f_2 son linealmente dependientes o independientes en $\mathbb{R}$.

(ii) ¿Contradice este ejemplo el Teorema que afirma: " Si el Wronskiano de dos soluciones de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, con p, q continuas en un intervalo abierto I, se anula en algún punto de I, entonces las soluciones son linealmente dependientes en I"? Justifique.

Solución.

(a) Notemos las funciones

$$y_1(x) = e^{-x}\ , y_2(x) = x e^{-x}\ , y_3(x) = \sin(3x)\ , y_4(x) = \cos(3x),$$

son LI para todo $x \in \mathbb{R}$. Basta ver por ejemplo que $W(y_1, y_2, y_3, y_4)(0) \neq 0$. Para construir la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, identificamos primero las raíces del polinomio característico asociado. Como los términos e^{-x}, xe^{-x} corresponden a $r = -1$ como raíz doble y los $\sin(3x), \cos(3x)$ a $r = \pm 3i$ como raíces complejas entonces el polinomio está dado por

$$p(r) = (r+1)^2(r^2+9) = r^4 + 2r^3 + 10r^2 + 18r + 9,$$

y luego la ecuación diferencial es

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 10y'' + 18y' + 9y = 0.$$

(b) (i) Notemos que para todo $t \in \mathbb{R}$, $f_1' = 3t|t|$ y que el Wronskiano es

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2|t| & t^3 \\ 3t|t| & 3t^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, esto no permite concluir que f_1 y f_2 son linealmente dependientes.

Sean $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular,

- para $t = 1$, se tiene que $\beta_1 + \beta_2 = 0$,
- para $t = -1$, se tiene que $-\beta_1 + \beta_2 = 0$,

y luego $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y las funciones f_1, f_2 son **linealmente independientes** (LI) en todo $\mathbb{R}$.

(ii) **No hay contradicción.** El Teorema se aplica únicamente a *soluciones de la misma EDO lineal* con coeficientes continuos en el intervalo. Habría que ver si f_1 y f_2 son ambas soluciones de tal ecuación en $\mathbb{R}$.
Efectivamente, si f_1 y f_2 son soluciones de la misma ecuación lineal homogénea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ con p, q continuas en $\mathbb{R}$ entonces en particular $g = f_1 - f_2$ es también solución. Como $g(0) = 0 = g'(0)$ entonces el Teorema de existencia y unicidad implica que la solución g es idénticamente nula pero $g(t) = t^2(|t| - t) \neq 0$ para $t < 0$.
El ejemplo ilustra que la recíproca del teorema del Wronskiano no es verdadera fuera del caso de soluciones de EDO lineales con coeficientes continuos.

Asignación de puntaje

(a)
- Asignar **(1 pt)** por identificar correctamente las raíces $\{-1, \pm 3i\}$ del eventual polinomio característico asociado a la ecuación que estamos buscando usando la forma de la solución propuesta. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error en las raíces.
- Asignar **(1 pt)** por construir correctamente el polinomio característico.
- Asignar **(1 pt)** por obtener correctamente la ecuación diferencial.

(b)
- Asignar **(0.5 pt)** por calcular correctamente el wronskiano y obtener $W(f_1, f_2) = 0$ yr concluir que el wronskiano nulo no implica necesariamente dependencia lineal.
- Asignar **(1 pt)** por demostrar correctamente que f_1 y f_2 son LI.
- Asignar **(0.5 pt)** por responder que no hay contradicción.
- Asignar **(1 pt)** por justificar que el teorema exige que las funciones sean soluciones de la misma EDO lineal con coeficientes continuos y que f_1 y f_2 no lo pueden satisfacer por el argumento de existencia y unicidad con $g = f_1 - f_2$.

4. **(6 pts)** Una masa de 2 kg se suspende de un resorte con constante elástica $k = 8$ en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. El sistema tiene amortiguamiento proporcional a la velocidad con constante $\gamma \geq 0$ en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, y está sujeto a una fuerza externa $F(t) = 4\cos(2t)$ en N.

   (a) Determine la ecuación diferencial que modela el desplazamiento $x(t)$ de la masa al instante t en segundos.
   (b) ¿Para qué valores de $\gamma > 0$ el sistema es subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado?
   (c) Para $\gamma = 4$, encuentre la solución particular del sistema.
   (d) Para $\gamma = 0$, identifique la frecuencia natural ω_0 del sistema y encuentre la solución general si la masa parte del reposo con velocidad cero. Describa el comportamiento físico cuando $t \to +\infty$.

Solución.

(a) Por la segunda ley de Newton con masa $m = 2$, constante elástica $k = 8$ y amortiguamiento $\gamma \geq 0$, tenemos

$$2x'' + \gamma x' + 8x = 4\cos(2t).$$

(b) El polinomio característico asociado a la ecuación homogénea es

$$q(r) = 2r^2 + \gamma r + 8 = 0,$$

con discriminante $\Delta = \gamma^2 - 64$. Por lo tanto, destacamos tres regímenes (sabiendo que $\gamma > 0$)

- Si $\Delta < 0$ entonces $0 < \gamma < 8$ y el sistema es subamortiguado.
- Si $\Delta = 0$ entonces $\gamma = 8$ y el sistema es críticamente amortiguado.
- Si $\Delta > 0$ entonces $\gamma > 8$ y el sistema es sobreamortiguado.

(c) Sea $\gamma = 4$. Entonces, la ecuación del movimiento es $x'' + 2x' + 4x = 2\cos(2t)$. Buscamos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t),$$

usando el método de coeficientes indeterminados para obtener $A = 0$ y $B = \frac{1}{2}$. Luego, la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\sin(2t).$$

(d) Para $\gamma = 0$ la ecuación del movimiento es

$$x'' + 4x = 2\cos(2t),$$

con frecuencia natural $\omega_0 = 2\ \mathrm{rad}\,\mathrm{s}^{-1}$ o sea $x'' + \omega_0^2 x = 2\cos(2t)$. Como la frecuencia de la fuerza externa coincide con la del sistema libre ω_0, entonces hay

resonancia y la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + x_p(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

donde la solución particular es de la forma $x_p = t(A\cos(2t) + B\sin(2t))$. Nuevamente por coeficientes indeterminados, obtenemos $A = 0$ y $B = \frac{1}{2}$ y luego la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{t}{2}\sin(2t),$$

y la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{t}{2}\sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $x(0) = x'(0) = 0$ entonces $c_1 = c_2 = 0$ y luego

$$x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t).$$

Notemos que $|x(t)| \leq \frac{t}{2}$ o sea la amplitud crece sin cota como $\frac{t}{2}$ cuando $t \to +\infty$ y se produce **resonancia**. A diferencia del caso amortiguado, sin disipación la enegría se acumula indefinidamente en el sistema.

Asignación de puntaje

(a) Asignar **(0.5 pt)** por determinar correctamente la ecuación del movimiento.

(b) **(3 pts)** Sea $\gamma = 4$.
- Asignar **(0.5 pt)** por indicar el polinomio característico (o la ecuación característica) y calcular correctamente su discriminante.
- Asignar **(1.5 pts)** por identificar correctamente los tres regímenes según los valores de γ. **(0.5 pt)** por cada regimen.

(c)
- Asignar **(1 pt)** por encontrar una solución particular de la ecuación reducida $x'' + 2x' + 4x = 2\cos(2t)$ usando un método adecuado.
- Descontar **(0.25 pt)** si se comete a lo más un error en este proceso de resolución.

(d) **(2.5 pts)** Sea $\gamma = 0$.
- Asignar **(0.5 pt)** por identificar $\omega_0 = 2\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$.
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar una solución general de la ecuación homogénea asociada.
- Asignar **(0.5 pt)** por proponer una solución particular $x_p = t(A\cos(2t) + B\sin(2t))$.
- Asignar **(0.5 pt)** por aplicar las condiciones iniciales de reposo $x(0) = x'(0) = 0$ y obtener que la solución del PVI es $x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t)$.

- Asignar **(0.5 pt)** por reconocer el regimen de resonancia y describir el crecimiento de la amplitud cuando $t \to +\infty$.