PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
31 Mayo 2018

MAT–1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES
INTERROGACIÓN 3
Primer Semestre 2018

Problema 1 Considere el sistema siguiente:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = M\mathbf{y}\,, \quad \text{donde} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine la solución general del sistema. **4 ptos**

b) Calcule e^{Mt}. **2 ptos**

Solución: El polinomio característico $p(\lambda)$ asociado a la matrix M es

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$ Calcular polinomio característico **0.5 ptos**

y los valores propios son $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Calcular raíces **0.5 ptos**

Usando el método de los vectores propios, podemos construir una matriz fundamental del sistema.

Calculando se obtiene que los correspondientes vectores propios v_1, v_2 asociados a $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$ son respectivamente

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Entonces una matriz fundamental del sistema es

$$\Psi(t) = \Re\left[v_1 e^{(1+i)t} \quad v_2 e^{(1-i)t}\right] = \begin{bmatrix} e^t\cos(t) & e^t\text{sen}\,(t) \\ -e^t\text{sen}\,(t) & e^t\cos(t) \end{bmatrix}$$ Calcular matriz fundamental **2.0 ptos**

La solución general del sistema es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Psi(t)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t\cos t \\ -\mathrm{e}^t\sin t \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t\sin t \\ \mathrm{e}^t\cos t \end{bmatrix},$$ Describir solución general **1.0 ptos**

Solución: Parte (b)
La matriz exponencial, para el caso de matriz asociada constante, es aquella matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisface que $\Phi(0) = I$. Argumentar porqué **1.0 ptos**

Por lo tanto, en este caso ella es

$$e^{Mt} = \begin{bmatrix} e^t\cos(t) & e^t\sin(t) \\ -e^t\sin(t) & e^t\cos(t) \end{bmatrix}$$ Explicitar e^{Mt} **1.0 ptos**

Problema 2 Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ -9 & -12 \end{bmatrix}$ y la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{1+t^2} \\ -\frac{3}{1+t^2} \end{bmatrix}$.

a) Calcule una matriz fundamental para el sistema homogéneo $\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\mathbf{y}$. **3 ptos**

b) Resuelva el problema de valor inicial $\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\mathbf{y}+\mathbf{F}(t)$ con $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **3 ptos**

Solución:

Parte a)

La matriz A tiene valor propio nulo doble con vector propio $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ y vector propio generalizado $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 4 & -1+4t \\ -3 & 1-3t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$ Determinar una matriz fundamental **2.0 ptos**

es matriz fundamental asociada con A.

Por lo tanto

$$e^{tA} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1+12t & 16t \\ -9t & 1-12t \end{bmatrix}.$$ Calcular e^{tA} **1.0 ptos**

Solución: Parte b)

La fórmula de Duhamel (variación de parámetro), asegura que la solución del sistema no homogéneo está dada por

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\mathbf{F}(s)ds + e^{tA}\mathbf{y}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y_0 = y(0).$$ Explicitar fórmula completa **0.5 ptos**

Luego,

$$\begin{aligned} e^{(t-s)A}\mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}(s), \\ e^{tA}\mathbf{y}_0 &= \mathbf{w} + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Calcular $e^{(t-s)A}\mathbf{F}(s)$ **1.0 ptos**

Calcular $e^{tA}\mathbf{y}_0$ **0.5 ptos**

Reemplazando en la fórmula e integrando, obtenemos

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 4\arctan t + 4t - 1 \\ -3\arctan t - 3t + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$ Encontrar solución **1.0 ptos**

Observación: Como $\mathbf{f}(t)$ con t fijo es vector propio de A e $\mathbf{y}_0$ es vector propio asociado, el cálculo explícito de e^{tA} no es indispensable.

Problema 3 Considere A, B dos matrices cuadradas de $n \times n$ no nulas.

a) Pruebe que si $A^2 = 5A$ entonces $e^{tA} = I + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1)A$. **3.0 ptos**

b) Pruebe que si $e^{(A+B)t} = e^{tA}e^{tB}$ entonces $AB = BA$. **3.0 ptos**

Solución: Parte (a)
De la igualdad $A^2 = 5A$ se obtiene que $A^k = 5^{k-1}A$, para $k \geq 2$.

Usando la definición de la exponencial como la serie se obtiene que:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} 5^{k-1} A \right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA + \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 5^{k-1} \right) A = I + tA + \frac{1}{5} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(5t)^k}{k!} \right) A \\ &= I + tA + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1 - 5t)A = I + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1)A \end{aligned}$$

0 - 1 - 3 ptos

Solución: Parte (b)
Supongamos que $e^{(A+B)t} = e^{tA}e^{tB}$ para todo t. Derivando la igualdad se obtiene que

$$(A + B)e^{(A+B)t} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$$

Derivando nuevamente se obtiene que

$$(A + B)^2 e^{(A+B)t} = (Ae^{tA}e^{tB})_t + (e^{tA}Be^{tB})_t$$

Luego,

$$(A + B)^2 e^{(A+B)t} = A^2 e^{tA}e^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2 e^{tB}$$

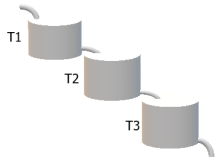
Evaluando en $t = 0$ se concluye que

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + AB + B^2 \Longrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$$

Simplificando la última igualdad, $BA = AB$.

0 - 1 - 3 ptos

Problema 4 Agua limpia fluye al estanque T_1 a la razón de 9 litros por minuto, la salmuera (mezcla de agua y sal) fluye desde el estanque T_1 al estanque T_2 y desde éste al estanque T_3 desaguándose después como muestra la siguiente figura:



a) Llamemos $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ los kilos de sal que contiene cada estanque en el tiempo t medido en minutos. Calcule la cantidad de sal que contiene cada estanque después de 6 minutos sabiendo que la cantidad de salmuera en cada estanque al principio es de $V_1 = 9$, $V_2 = 18$ y $V_3 = 27$ litros y T_1 contiene 2 kilos de sal y no había sal en T_2 y T_3. **4.0 ptos**

b) Determine en que momento los dos primeros estanques tienen la misma cantidad de sal. **2.0 ptos**

Solución:

La ley de vaciado de estanques (con fujo constante) dice que el sistema que representa a tres estanques conectados es:

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1 \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ x_2' &= k_2 x_2 - k_3 x_3 \end{aligned}$$

donde $k_i = \dfrac{9}{V_i}$. Luego se tiene que la matriz asociada al sistema es

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Plantear el sistema **1.0 ptos**

Puesto que K es una matriz triangular, sus valores propios son las entradas de la diagonal,

$$\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = -1/2\,, \quad \lambda_3 = -1/3$$

Resolviendo por el método de vectores propios se obtiene que los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}\,, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/6 \\ 1/2 \end{bmatrix}\,, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\,,$$

Luego una matriz fundamental es

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & -\frac{1}{6}e^{-t/2} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t/2} & e^{-t/3} \end{bmatrix}$$

Encontrar una matriz fundamental **1.0 ptos**

Elegir vector w_0 de tal forma que se cumpla la condicion inicial

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow w_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ -24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Aplicar las condiciones iniciales **1.0 ptos**

De esta manera la única solución del PVI es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \Psi(t) \begin{bmatrix} 6 \\ -24 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -4e^{-t} + 4e^{-t/2} \\ 3e^{-t} - 12e^{-t/2} + 9e^{-t/3} \end{bmatrix}$$

Luego la cantidad de sal que hay en cada estanque después de 6 minutos es

$$x_1(6) = \frac{2}{e^6}\,, \quad x_2(6) = -\frac{4}{e^6} + \frac{4}{e^3}\,, \quad x_3(6) = \frac{3}{e^6} - \frac{12}{e^3} + \frac{9}{e^2}$$

Soluciones evaluadas en $t = 6$ minutos **1.0 ptos**

Solución: Parte (b) Hay que determinar $t > 0$ de tal forma que $x_1(t) = x_2(t)$, es decir,

$$2e^{-t} = -4e^{-t} + 4e^{-t/2}$$

Ecuación para calcular t **0.5 ptos**

Sea $z = e^{-t/2}$. Entonces la ecuación se transforma en

$$2x^2 = -4x^2 + 4x \Longrightarrow x(3x - 2) = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Luego, $t = -\ln(4/9) \approx 0{,}81$ minutos.

Solución en t **1.5 ptos**