MAT–1640 - ECUACIONES DIFERENCIALES
PAUTA INTERROGACIÓN 2
Primer Semestre 2018

1. *a*) Determine una ecuación diferencial de segundo orden de tal manera que la familia de funciones

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

sean soluciones de la ecuación.

b) Clasifique el tipo de estabilidad de los puntos críticos (puntos de equilibrio) de la ecuación $y' = y(y-1)^2(y-2)$.

Solución: Parte(a)

Basta con encontrar una ecuación diferencial cuya ecuación característica admite 2 y -1 como raíces.
Determinar raíces de ecuación característica **1.0 ptos**

Entonces la ecuación característica se factoriza como:

$(r+1)(r-2) = r^2 - r - 2$ Determinar ecuación característica **1.0 ptos**.

Determinar la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0.$$ Encontrar ecuación diferencial **1.0 ptos**

Solución: Parte(b)

Los puntos críticos (puntos de equilibrio) de la ecuación son $y = 0$, $y = 1$, e $y = 2$, soluciones estacionarias para la ecuación.

La pendiente es positiva en $]-\infty, 0[$ y negativa en $]0, 1[$, luego se obtiene que $y = 0$ es estable. **1.0 ptos**

La pendiente es negativa en los intervalos $]0, 1[$, $]1, 2[$, luego, $y = 1$ es un punto crítico semiestable. **1.0 ptos**

La pendiente es negativa en $]1, 2[$ y positiva en $]2, \infty[$, luego el punto crítico $y = 2$ es inestable. **1.0 ptos**

2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2y'}{x} + y = \frac{1}{x},$$

sabiendo que $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución: La ecuación homogénea asociada es

$$y'' + \frac{2y'}{x} + y = 0.$$

Utilizando la fórmula de Abel, una segunda solución de la ecuación homogénea es

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}}}{y_1^2} dx == \frac{\cos x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\frac{(\cos x)^2}{x^2}} dx \\ &= \frac{\cos x}{x} \int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \frac{\cos x}{x} \tan x = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Teniendo dos soluciones l.i. $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $y_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ para la ecuación homogénea asociada.

Encontrar la otra solución li. de la ecuación homogénea. **2.0 ptos**

utilizamos el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p(x) = u_1(x) \cdot y_1(x) + u_2(x) \cdot y_2(x)\,,$$

donde $u_1(x) = \int \frac{W_1}{W}$, $u_2(x) = \int \frac{W_2}{W}$.

Calculamos el Wronskiano $W(x)$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \\ -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} & -\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}.$$

Calcular el Wronskiano **1.0 ptos**

Además,

$$W_1(x) = -\frac{1}{x} \cdot y_2(x) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{\sin x}{x^2},$$

y similarmente $W_2(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$. Así

$$u_1 = \int -\sin(x) = \cos(x)\,, \qquad u_2 = \int \cos(x) = \sin(x)\,.$$

Calcular u_1, u_2. **1.0 ptos** por cada una.

Determinar solución particular. **1.0 ptos**

Finalmente, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x}.$$ Determinar solución general **1.0 ptos**

3. Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada es $y'' + 4y' + 4y = 0$ cuya ecuación característica es $r^2 + 4r + 4 = 0$ la cual tiene una raíz doble $r = -2$.

Reconocer la ecuación característica y sus raíces	**1.0 ptos**

Por lo tanto, la solución general y_g de la ecuación homogénea es

$$y_g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Determinar la solución general de la ecuación homogénea	**2.0 ptos**

Utilizando el método de variación de constantes ó el de coeficientes indeterminados se encuentra una solución particular y_p de la ecuación no homogénea $y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$,

$$y_p(t) = \frac{1}{6}\, t^3 e^{-2t}\,.$$

Obtener solución particular y_p por algún método.	**2.0 ptos**

Imponiendo las condiciones iniciales se tiene que $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

De esta manera la solución del PVI es

$$y(t) = \frac{1}{6}\, t^3 e^{-2t} + te^{-2t}\,.$$

Calcular solución.	**1.0 ptos**

4. Determine la trayectoria (ocurva del movimiento) para un sistema no amortiguado descrito por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 2\cos(3t)\,; \qquad x(0) = 1; \quad x'(0) = 0.$$

Describa (en palabras) el comportamiento del sistema cuando $t \to \infty$.

Solución: La solución general es $x = x_H + x_P$ donde x_P es alguna solución particular y x_H la solución *general* del caso homogéneo, $x'' + 9x = 0$.

- Para hallar x_H consideramos la ecuación característica asociada a la ecuación homogénea: $r^2 + 9 = 0$, la cual posee las raíces complejas conjugadas $0 \pm 3i$, originando las soluciones linealmente independientes $\cos(3t)$ y $\operatorname{sen}(3t)$, de modo que

$$x_H = C_1\cos(3t) + C_2\operatorname{sen}(3t)\,.$$

Determinar la solución general del homogéneo. **1.0 ptos**

- Para hallar x_P usamos el método de los coeficientes indeterminados. dada la naturaleza de la solución del caso homogéneo, debemos buscar función del tipo $x_P = At\cos(3t) + Bt\operatorname{sen}(3t)$, con A, B coeficientes por determinar.
  Derivando dos veces obtenemos

$$x_p'' = 6B\cos(3t) - 6A\operatorname{sen}(3t) - 9At\cos(3t) - 9Bt\operatorname{sen}(3t)\,.$$

de modo que, sustituyendo en la ecuación original obtenemos

$$x_p'' + 9x_P = 6B\cos(3t) - 6A\operatorname{sen}(3t)$$

y, como $x_P'' + 9x_P = 2\cos(3t)$ tenemos que $A = 0$ y $B = 1/3$.
Esto es,

$$x_P = \frac{1}{3}t\operatorname{sen}(3t).$$

Hallar solución particular por algún método. **2.0 ptos**

Por tanto, $x = x_P + x_H = C_1\cos(3t) + C_2\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{3}t\operatorname{sen}(3t)$.

Usando las primera condiciones iniciales,

$$C_1 = 1\,, \quad C_2 = 0\,.$$

Así, la solución al P.V.I. es $x(t) = \cos(3t) + \frac{1}{3}t\operatorname{sen}(3t)$..

Calcular solución del PVI **1.0 ptos**

Cuando $t \to \infty$ oscila con frecuencias cada vez mayores, debido a que es la suma de un término acotado ($\cos(3t)$) y otro cuya amplitud de oscilación crece sin cota con t.

Describir comportamiento para t grande **2.0 ptos**