Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
5 de Noviembre de 2012

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Solución de la Interrogación Nº 3.

1. Demuestre que para cualquier valor de λ en la ecuación diferencial

$$10y'' - \lambda x y' + 5\lambda y = 0,$$

una solución y_1 de ella es un polinomio. Determine explícitamente esta solución y calcule el desarrollo en serie de una segunda solución y_2 linealmente independiente de y_1. (**Nota: Para el desarrollo en serie $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, debe determinar explícitamente b_n como función de n.**)

Solución:

Si se escribe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, se tendrá que

$$\begin{aligned} 0 &= 10\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 5\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \text{cambio de índice para la 1era serie} &= \sum_{n=0}^{\infty} 10(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5\lambda c_n x^n \\ \text{agrupando términos} &= \sum_{n=0}^{\infty} (10(n+2)(n+1)c_{n+2} - \lambda(n-5)c_n)x^n, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$10(n+2)(n+1)c_{n+2} = \lambda(n-5)c_n \quad \text{para todo } n.$$

Reemplazando $n = 1$, $n = 3$, $n = 5$ sucesivamente se tiene

$$c_3 = \frac{\lambda(1-5)}{10\cdot 3\cdot 2}c_1 = \frac{-4\lambda}{10\cdot 3\cdot 2}c_1, \quad c_5 = \frac{\lambda(3-5)}{10\cdot 5\cdot 4}c_3 = \frac{(-2\lambda)(-4\lambda)}{10^2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}c_1,$$

$$c_7 = \frac{\lambda(5-5)}{10\cdot 7\cdot 6}c_5 = 0, \quad c_9 = c_{11} = \ldots = 0.$$

Reemplazando ahora $n = 0$, $n = 2$, $n = 4$ sucesivamente se tiene

$$c_2 = \frac{\lambda(-5)}{10\cdot 2\cdot 1}c_0, \quad c_4 = \frac{\lambda(2-5)}{10\cdot 4\cdot 3}c_2 = \lambda^2\frac{(2-5)(-5)}{10^2 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}c_0,$$

$$c_6 = \frac{\lambda(4-5)}{10\cdot 6\cdot 5}c_4 = \lambda^3\frac{(4-5)(2-5)(-5)}{10^3 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}c_0,$$

de manera que en general

$$c_{2m} = \frac{\lambda^m}{10^m(2m)!}(2m-7)(2m-9)\cdots(1)(-1)(-3)(-5)c_0.$$

Eligiendo primero $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$, y luego $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$ se obtiene las dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = x - \frac{4\lambda}{10\cdot 3!}x^3 + \frac{8\lambda^2}{10^2\cdot 5!}x^5$$

la cual es un polinomio de grado 5, y

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{10^m(2m)!}(2m-7)(2m-9)\cdots(1)(-1)(-3)(-5)x^{2m}.$$

2. Use el método de variación de parámetros para hallar la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + 3y + 3e^{4t} \\ y'(t) &= 3x + y - 3e^{-2t} \end{aligned}$$

y luego determine aquella solución que satisface $(x(0), y(0)) = (1, -1)$.

Solución:

El sistema se escribe en la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

• Calculamos primero una matriz fundamental. Para esto resolvemos la ecuación homogenea

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se tiene que el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 9 = (\lambda-4)(\lambda+2),$$

luego sus raíces son $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4$. Así, un vector propio $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ asociado a λ_1 satisface $a + b = 0$ y un vector propio $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ asociado a λ_2 satisface $a - b = 0$. Concluímos que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego una matriz fundamental está dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

• Variación de parámetros: Una solución particular del sistema estará entonces dada por

$$\vec{X}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Cálculo de la inversa:

$$(\Phi(t))^{-1} = \frac{e^{-2t}}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{e^{-2t}}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} e^{6t} + 1 \\ 1 - e^{-6t} \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{6t}+6t \\ e^{-6t}+6t \end{pmatrix} \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\vec{X}_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (e^{4t}+e^{-2t})(6t+1) \\ (e^{4t}-e^{-2t})(6t-1) \end{pmatrix}.$$

Concluímos que la solución general del sistema dado es

$$\vec{X}(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (e^{4t}+e^{-2t})(6t+1) \\ (e^{4t}-e^{-2t})(6t-1) \end{pmatrix} + A\vec{v}_1 e^{-2t} + B\vec{v}_2 e^{4t}.$$

También pueden usar la fórmula:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \Phi(t)\int (\Phi(t))^{-1}\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix} dt + \Phi(t)\vec{C} \\ &= \Phi(t)\int \frac{e^{-2t}}{2}\begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix} dt + \Phi(t)\vec{C} \\ &= \Phi(t)\int \frac{3}{2}\begin{pmatrix} e^{6t}-1 \\ 1-e^{-6t} \end{pmatrix} dt + \Phi(t)\vec{C} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{pmatrix}\frac{3}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{6t}-t \\ \frac{1}{6}e^{-6t}+t \end{pmatrix} + \Phi(t)\vec{C} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (e^{4t}+e^{-2t})(6t+1) \\ (e^{4t}-e^{-2t})(6t-1) \end{pmatrix} + \Phi(t)\vec{C}. \end{aligned}$$

• Ahora se calcula $\vec{C} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ para tener

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi(0)\vec{C}$$

lo que da $A = 3/4$, $B = -1/4$.

3. Resuelva el problema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\vec{X}, \qquad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Es fácil ver que la matriz del problema tiene como polinomio característico a $(3-\lambda)^3$, luego se tiene $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Además el espacio propio asociado tiene dimensión 1 y está generado por $\vec{v}_1 = \vec{e}_2 = (0,1,0)$. Buscamos los vectores propios generalizados resolviendo primero

$$(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{v}_2 = (a,b,c),$$

lo que da $a = 0$, $c = 1$, luego podemos elegir $\vec{v}_2 = \vec{e}_3 = (0,0,1)$. Resolvemos por último

$$(A-3I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{v}_3 = (a,b,c),$$

lo que da $a = 1$, $c = 0$, de manera que $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 = (1,0,0)$. Tenemos entonces que tres soluciones l.i. del sistema son

$$\vec{X}_1 = \vec{e}_2 e^{3t}, \quad \vec{X}_2 = (\vec{e}_2 t + \vec{e}_3)e^{3t}, \quad \vec{X}_3 = (\vec{e}_2\frac{t^2}{2} + \vec{e}_3 t + \vec{e}_1)e^{3t},$$

de donde una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{3t} \\ e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2}e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \end{pmatrix}.$$

La solución pedida es $\vec{X} = \Phi(t)\vec{C}$, donde $\vec{C} = (a, b, c)$ satisface

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

es decir $1 = c$, $3 = a$, $-1 = b$. Así, la solución pedida es

$$\vec{X} = 3\vec{X}_1 - \vec{X}_2 + \vec{X}_3.$$

4. *a*) Calcule la matriz B si

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

b) Demuestre que todas las soluciones del sistema

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{X}$$

tienden a cero cuando $t \to \infty$ si y sólo si $a + d < 0$ y $ad - bc > 0$.

Solución:

a) Sabemos que $\Phi(t) = e^{Bt}$ es una matriz fundamental del sistema $\vec{X}\,'(t) = B\,\vec{X}(t)$, de donde se cumple que

$$\Phi'(t) = B\,\Phi(t).$$

Evaluando en $t = 0$ concluímos que

$$B = \Phi'(0)\,(\Phi(0))^{-1}.$$

Finalmente, como $\Phi(t) = e^{At}$ se tiene que $\Phi(0) = I \quad \Rightarrow \quad (\Phi(0))^{-1} = I$, por lo cual

$$B = \left.\frac{d}{dt}\,e^{Bt}\right|_{t=0} = \left.\begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 4e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 6e^{2t} - 3e^t & 6e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 4e^{2t} \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) El polinomio característico asociado al sistema es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \quad \lambda_i \in \mathbb{C},$$

y $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ y $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$.

Las soluciones del sistema son de la forma

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1 &= A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \\
\vec{X}_2 &= A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + B(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2) e^{\lambda_1 t}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \\
\vec{X}_3 &= A\mathrm{Re}(\vec{v}_1 e^{iqt}) e^{pt} + B\mathrm{Im}(\vec{v}_1 e^{iqt}) e^{pt}, \quad \lambda_1 = p + iq,\ q \neq 0.
\end{aligned}$$

Aqui $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ representan vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1,\ \lambda_2$ en caso de que éstos sean distintos, $\vec{v}_1$ vector propio y $\vec{v}_2$ vector propio generalizado en caso de ser iguales.

Si todas las soluciones tienden a 0 cuando $t \to \infty$, entonces debe tenerse que $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$ en caso de ser reales, y $p = \mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ en el caso complejo. En todos estos casos la suma $\lambda_1 + \lambda_2$ es negativa y el producto $\lambda_1\lambda_2 > 0$, de donde $a + d = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ y $ad - bc = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

Recíprocamente, si $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d < 0$ y $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc > 0$, de lo segundo se tiene que si los valores propios son reales, entonces tienen el mismo signo, y de lo primero su suma es negativa, luego ambos son negativos. Si ambos son complejos, la primera condición dice que su parte real es negativa. En consecuencia, cualquier solución tiende a 0 cuando $t \to \infty$.