MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 12)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repasemos lo visto sobre EDO's lineales de orden superior

(para ser más concretos, consideraremos ecuaciones de orden 2)

- Nuestro objectivo es poder resolver el **PVI de orden 2**:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1.$$

Sabemos que si p, q, f son continuas en un intervalo $\mathcal{I}$ (con $a \in \mathcal{I}$), existe una única solución al PVI en $\mathcal{I}$.

- Un problema más sencillo es consider el PVI para **ecuaciones homogéneas**:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1.$$

La EDO homogénea satisface el **principio de superposición**:

"Toda combinación lineal de soluciones es también solución"

• Supongamos que conocemos dos soluciones, y_1, y_2, de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

(y estas no satisfacen las condiciones iniciales)

EL principio de superposición nos sugiere buscar una solución al PVI de la forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

• Aprendimos (ver Teorema en clase anterior) que si y_1, y_2 son **linealmente independientes**, entonces

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

es la solución general y no existen otras soluciones (sol. singulares).

La solución al PVI se obtiene determinando las constantes c_1, c_2 tal que

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1.$$

• Dos funciones f, g son **linealmente independientes (l.i.)** en $\mathcal{I}$ si la única combinación lineal tal que

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$$

es la trivial $c_1 = c_2 = 0$.

• f, g son **linealmente dependientes (l.d.)** en $\mathcal{I}$ si no son l.i.

En el caso de 2 funciones, estas son l.d. si una es un múltiplo (constante) de la otra (es decir $f(x) = cg(x)$).

• **wronskiano**: herramienta para determinar dependencia/independencia lineal.

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Propiedades generales:

1. Si f, g son l.d. en $\mathcal{I}$, entonces $W(f, g) = 0$ en todo $\mathcal{I}$.
2. Si $W(f, g) \neq 0$ en algún $x_0 \in \mathcal{I}$, entonces f, g son l.i. en $\mathcal{I}$.

Volvamos a la EDO homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

con y_1, y_2 soluciones.

• El **wronskiano** tiene mejores propiedades si nos restringimos a soluciones de la EDO homogénea.

Propiedades de $W(y_1, y_2)$:

y_1, y_2 l.d. en $\mathcal{I} \Leftrightarrow$ $W(y_1, y_2) = 0$ en todo $\mathcal{I} \Leftrightarrow W(y_1, y_2) = 0$ en algún $x_0 \in \mathcal{I}$

y_1, y_2 l.i. en $\mathcal{I} \Leftrightarrow$ $W(y_1, y_2) \neq 0$ en todo $\mathcal{I} \Leftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0$ en algún $x_0 \in \mathcal{I}$

• Las propiedades anteriores se deducen de la **fórmula de Abel**:

Como $W(y_1, y_2)$ satisface la ecuación $W' + p(x)W = 0$, entonces

$$W(x) = Ke^{-\int p(x)dx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

...fin del repaso.

Hemos aprendido que, si nos dan n soluciones l.i. de una EDO lineal homogénea de orden n, somos capaces de resolver el PVI.

Vimos además que solo para ecuaciones de orden 2, dada una solución y_1 podemos encontrar otra, y_2, tal que ambas son l.i.:

método de reducción de orden: se propone $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, y se llega a una EDO de 2do orden, reducible, para v.

¿Es posible encontrar n soluciones l.i. para una EDO homogénea de orden n?

$\rightarrow$ En general **no**, ya que es muy difícil

$\rightarrow$ Si la EDO lineal tiene **coeficientes constantes**, entonces **si** existen métodos.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideremos los coeficientes constantes $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$, y la ecuación:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

El método de resolución está basado en la siguiente observación:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{rx}\right) = re^{rx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{rx}\right) = r^2 e^{rx}, \ \ldots, \boxed{\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{rx}\right) = r^k e^{rx}}$$

Proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{rx}$, entonces

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \\ &= e^{rx}(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0) \end{aligned}$$

Luego, $y(x) = e^{rx}$ es solución si r satisface la **ecuación característica (o auxiliar)**:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0,$$

es decir, si r es raíz del **polinomio característico (o auxiliar)**

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0.$$

En resumen, **la resolución de una EDO homogénea con coeficientes constantes se reduce a encontrar las soluciones de la ecuación característica** (o raíces del polinomio característico).

Existen distintos casos dependiendo de si el polinomio característico tiene o no raíces repetidas, y si estas son números reales o complejos.

El caso más sencillo es cuando hay n **raíces reales distintas**, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, ya que

$$p(r) = (r - r_n)(r - r_{n-1}) \cdots (r - r_2)(r - r_1).$$

Teorema. [Raíces reales dinstintas]
Si las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ del polinomio característico son reales y distintas, entonces, la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}.$$

Obs. Lo anterior equivale a decir que las funciones $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ son soluciones linealmente independientes.

Para abarcar los otros casos necesitamos el concepto de operador diferencial.

Definimos el **operador diferencial** más sencillo $\boxed{D = \dfrac{d}{dx}}$

$$Dy = y', \quad D^2y = y'', \quad \dots \quad , D^k y = y^{(k)}.$$

Esto nos permite reinterpretar el lado izquierdo de la EDO como un **operador diferencial** L actuando sobre la función $y(x)$:

$$\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y}_{L[y]} = 0$$

donde L corresponde a un **operador diferencial polinomial**:

$$\begin{aligned} L[y] &= a_n D^n y + a_n D^{n-1} y + \cdots + a_2 D^2 y + a_1 Dy + a_0 y \\ &= \underbrace{\left(a_n D^n + a_n D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right)}_{L} y \end{aligned}$$

Obs. Los operadores diferenciales polinomiales se comportan como polinomios.

- Si a, b son números reales o complejos

$$(D-a)(D-b) = (D-b)(D-a) = D^2 - (a+b)D + ab.$$

- Existen números $r_1, \ldots, r_n$ reales o complejos tales que si

$$L = a_n D^n + a_n D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

entonces

$$L = (D-r_n)(D-r_{n-1})\ldots(D-r_2)(D-r_1)$$

(pueden repetirse y el orden no importa)

- Los números $r_1, \ldots, r_n$ son precisamente las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} p(r) &= a_n r^n + a_n r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 \\ &= (r-r_n)(r-r_{n-1})\ldots(r-r_2)(r-r_1) \end{aligned}$$

Antes de pasar a los casos de raíces reales repetidas y raíces complejas notemos lo siguiente:

Para el caso de **raíces reales distintas**, podemos resolver la ecuación diferencial $L[y] = 0$ reordenando los términos del operador diferencial L

$$L[y] = (D - r_n)(D - r_{n-1}) \dots (D - r_2)(D - r_1)y = 0$$

Si $(D - r_1)y = y' - r_1 y = 0$, entonces $L[y] = 0 \quad \longrightarrow \quad y(x) = e^{r_1 x}$.

Podemos reescribir la ecuación de la forma:

$$L[y] = (D - r_n)(D - r_{n-1}) \dots (D - r_1)(D - r_2)y = 0$$

Luego otra solución sale de resolver $y' - r_2 y = 0 \quad \longrightarrow \quad y(x) = e^{r_2 x}$

De la misma manera obtenemos las n soluciones l.i.

$$e^{r_1 x}, \quad e^{r_2 x}, \quad \dots \quad , e^{r_n x}$$

¿Qué hacemos si hay raíces reales repetidas?

Si la raíz r_1 se repite k veces, entonces el término $(D - r_1)^k$ aparece en la factorización de L.

Para simplificar la explicación consideremos el operador de orden $k + 1$,

$$L = (D - r_2)(D - r_1)^k$$

Hay 2 soluciones evidentes a la ecuación $L[y] = 0 \quad \longrightarrow \quad e^{r_1 x},\ e^{r_2 x}$

Sin embargo, aún nos faltan $k - 1$ soluciones (buscamos $k + 1$ soluciones l.i.)

Buscando una solución adicional de la forma $y(x) = u(x)e^{r_1 x}$ se deduce que las soluciones restantes son:

$$\boxed{xe^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \quad \ldots \quad , x^{k-1} e^{r_1 x}}$$

En este caso la solución general queda:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + c_3 x^2 e^{r_1 x} + \quad \ldots \quad + c_k x^{k-1} e^{r_1 x} + c_{k+1} e^{r_2 x}$$

Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema. [Raíces repetidas]
Si la ecuación característica tiene una raíz real repetida r de multiplicidad k, entonces se agrega a la solución general el término

$$(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1})e^{rx}$$