MAT 1640 Ecuaciones diferenciales ordinarias
Examen recuperativo
el 9 de agosto de 2018
SOLUCIONES

Problema 1: Consideremos el problema

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2}, \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

Encuentre una familia infinita de soluciones de (1), definidas en todo $\mathbb{R}$.
¿Porque la existencia de varias soluciones de (1) no contradice el teorema de existencia y unicidad?
Solución: La ecuación en (1) es separable (aún autonóma) y tiene soluciones $y(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -1$, $t \in \mathbb{R}$, y $y(t) = \operatorname{sen}(t-c)$, $t \in (-\pi/2 + c, \pi/2 + c)$ donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Por lo tanto las funciones

$$y(t) = \begin{cases} -1 \quad \text{si} \quad t \leq -\frac{\pi}{2} + c, \\ \operatorname{sen}(t-c) \quad \text{si} \quad t \in (-\pi/2 + c, \pi/2 + c), \\ 1 \quad \text{si} \quad t \geq \frac{\pi}{2} + c, \end{cases}$$

con $c \geq \pi/2$ son soluciones del problema (1).
La parte "unicidad" del teorema de existencia y unicidad no se aplica a este problema como no podemos extender para ningún $\varepsilon > 0$ la función $f(y) = \sqrt{1-y^2}$, $|y| \leq 1$, de tal manera que la extensión sea continuamente diferenciable en el intervalo $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$.

Problema 2: Sea

$$f(t) = \begin{cases} \cos(4t) \quad \text{si} \quad 0 \leq t < \pi, \\ 0 \quad \text{si} \quad t \geq \pi. \end{cases}$$

Resuelva el problema

$$\begin{cases} y'' + 16y = f(t), \quad t > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución: Tenemos

$$f(t) = \cos(4t) - \cos(4(t-\pi))\,\mathcal{U}(t-\pi).$$

Sea $Y(s)$ la transfrormada de Laplace de y. Tenemos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{s}{(s^2+16)^2} e^{-\pi s}.$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{8} t \operatorname{sen}(4t) - \frac{1}{8}(t-\pi)\operatorname{sen}(4t)\,\mathcal{U}(t-\pi).$$

Problema 3: Resuelva la ecuación integral

$$y(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Solución: Seal $Y(s)$ la transfrormada de Laplace de y. Tenemos

$$Y(s) = \frac{6(s-1)}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)}.$$

Por lo tanto,

$$y(t) = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$

Problema 4: Encuentre los puntos de equilibriro del sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^2 + 2, \\ y' = x^2 - xy. \end{cases}$$

Clasifíquelos como estables o inestables.
Solución: Los puntos de equilibrio son las soluciones reales del sistema algebráico

$$\begin{cases} y - x^2 + 2 = 0, \\ x^2 - xy = 0, \end{cases}$$

es decir $(0, -2)$, $(-1. - 1)$ y $(2, 2)$.
Calculando el jacobiano $J(x, y)$ en el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ encontramos

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x - y & -x \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$J(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}\, J(0, -2) = -2 < 0.$$

Por lo tanto, $(0, -2)$ es silla, es decir es $(0, -2)$ equilibrio inestable.
Luego,

$$J(-1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}\, J(-1, -1) = 3 > 0, \quad \text{Tr}\, J(-1, -1) = 3 > 0.$$

Por lo tanto, $(-1, -1)$ es repulsor, es decir $(-1, -1)$ es equilibrio inestable.
Finalmente,

$$J(2, 2) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}\, J(2, 2) = 6 > 0, \quad \text{Tr}\, J(2, 2) = -6 < 0.$$

Por lo tanto, $(2, 2)$ es equilibrio (asintóticamente) estable.