PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEMESTRE DE VERANO 2018

Interrogación 3
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resolver el sistema

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{sujeto a } X(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

.

Solución:

Debemos, primero, encontrar la solución del sistema homogéneo asociado.

El polinomio característico está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$$

Luego los valores propios son:

$$\lambda = 4 \text{ y } \lambda = 3$$

- Si $\lambda = 4$, entonces buscamos un vector u tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De lo anterior tenemos que una posible opción es

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Si $\lambda = 3$, entonces buscamos un vector v tal que

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De lo anterior tenemos que una posible opción es

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De lo anterior se tiene que

$$X_h(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora necesitamos encontrar una solución particular. Ocupando variación de parámetros tenemos que

$$\begin{aligned}
X_p(t) &= \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -2e^{-3t} & 3e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{t} - 4e^{-4t} \\ -2e^{2t} + 12e^{-3t} \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} + e^{-4t} \\ -e^{2t} - 4e^{-3t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo que la solución general está dada por:

$$X(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix}$$

Imponiendo las condiciones inciales se tiene que

$$X(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 = 3 \text{ y } C_2 = -1$$

Finalmente la solución al PVI está dada por:

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} + 9^{4t} - e^{3t} - 1 \\ e^{5t} + 6e^{4t} - e^{3t} - 2 \end{bmatrix}$$

2. Resolver el sistema

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X(t), \quad \text{sujeto a } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

Solución:

El polinomio característico de la matriz es $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$.

Luego los valores propios son:

$$\lambda = 1 \text{ y } \lambda = 3$$

- Si $\lambda = 3$, entonces buscamos un vector u tal que

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  De lo anterior tenemos que una posible opción es

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Si $\lambda = 1$, entonces buscamos un vector v tal que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  De lo anterior tenemos que una posible opción es

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $MA > MG$, entonces debemos buscar un vector w propio generalizado resolviendo la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De lo anterior tenemos que una posible opción es

$$w = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución general del sistema está dada por:

$$X(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^t \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Luego, buscamos C_1, C_2 y C_3 tales que

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde $C_1 = \frac{5}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$ y $C_3 = -\frac{1}{2}$.

Finalmente, la solución al PVI es

$$X(t) = \frac{5}{4} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} e^t \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

3. En este ejercicio queremos analizar la evolución de los sentimientos amorosos de Romeo y Julieta. Sea $R(t)$ la medida del amor de Romeo por Julieta en el instante t y $J(t)$ el de Julieta por Romeo. Si esta medida es negativa, el sentimiento no es de amor sino de rechazo. Un modelo simple de la evolución de sus amores se basa en la consideración de que su amor crece o disminuye dependiendo sólo de sus sentimiento mutuos. Supongamos que esta dependencia es lineal. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= 4J \\ \frac{dJ}{dt} &= -9R \end{aligned}$$

Resuelva el sistema y grafique la curva solución en el plano RJ. Interprete, en el contexto del problema, la forma de la curva.

Solución:

La matriz asociada al sistema es

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

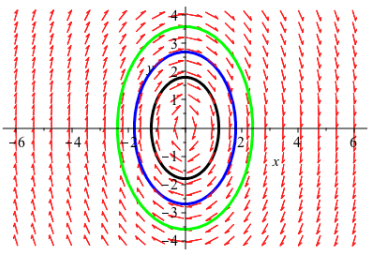
Luego los valores propios de la matriz son $\lambda = \pm 6i$.

De lo anterior tenemos que

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2\cos(6t) \\ -3\,\mathrm{sen}(6t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{sen}(6t) \\ 3\cos(6t) \end{bmatrix}$$

De aca podemos seguir de dos formas distintas:

- Notemos que $(0,0)$ es un punto crítico del sistema y como la matriz asociada al sistema tiene dos valores propios y estos son imaginarios puros, entonces el punto es un centro estable y las curvas solución son círculos o elipses en torno al $(0,0)$. Las curvas solución se muestran en la siguiente figura:



- Podemos intentar ver como son las formas de las soluciones. Recordemos, de cuando vimos resortes, que dados C_1 y C_2 constantes, existe α tal que

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \text{ y } \cos(\alpha) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} R(t) &= 2C_1 \cos(6t) + 2C_2 \,\text{sen}(6t) \\ &= 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(6t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \,\text{sen}(6t) \right) \\ &= 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\text{sen}(\alpha) \cos(6t) + \cos(\alpha) \,\text{sen}(6t) \right) \\ &= 2\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \,\text{sen}(6t + \alpha) \end{aligned}$$

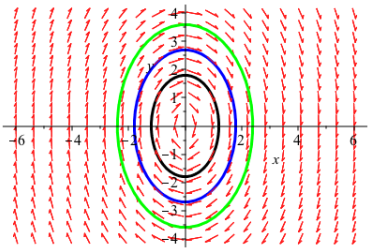
De forma analoga se tiene que

$$J(t) = -3C_1 \,\text{sen}(6t) + 3C_2 \cos(6t) = 3\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(6t + \alpha)$$

Luego la curva $(R(t), J(t))$ satisface la ecuación

$$\frac{R^2}{4(C_1^2 + C_2^2)} + \frac{J^2}{9(C_1^2 + C_2^2)} = 1$$

Es decir, las curvas solución son elipses.



De lo anterior podemos concluir que la relación entre Romeo y Julieta es de altos y bajos, pues hay periodos en que su amor es mutuo y otros en que solo uno es correspondido, así como también periodos en que ambos se rechazan. Todo lo anterior en forma cíclica a lo largo del tiempo.

4. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= x - x^3 \end{aligned}$$

a) Encuentre los puntos critícos del sistema.

b) Determine forma y estabilidad de los puntos críticos.

Solución:

a) Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - x^3 &= 0 \end{aligned}$$

Que tiene por solución $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ y $P_3(-1,-1)$.

b) Tenemos que $F(x,y) = x - y$ y $G(x,y) = x - x^3$. Luego

$$\begin{bmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para P_1 tenemos que la matriz está dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$ cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Luego se tiene que el punto es una espiral inestable.

- Para P_2 tenemos que la matriz esta dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ cuyas raíces son

$$\lambda = -1 \text{ o } \lambda = 2$$

Luego se tiene que el punto silla espiral inestable.

- Para P_3 tenemos que la matriz esta dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ cuyas raíces son

$$\lambda = -1 \text{ o } \lambda = 2$$

Luego se tiene que el punto silla espiral inestable.