Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 4

Modelos de Población:

1. Considere que un cierto lago se llena con peces y que las tasas de natalidad y mortalidad β y δ son ambas inversamente proporcionales a $\sqrt{P}$.

   (a) Muestre que
   $$P(t) = \left(\frac{1}{2}kt + \sqrt{P_0}\right)^2,$$
   donde k es una constante.

   (b) Si $P_0 = 100$ y en 6 meses hay 169 peces en el lago, ¿cuántos habrá después de 1 año?

2. Considere un prolífico grupo de conejos, cuyas tasas de nacimiento y mortalidad β y δ son cada una proporcional a la población de conejos $P = P(t)$, con $\beta > \delta$.

   (a) Muestre que
   $$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}, \qquad \text{constante } k.$$
   Note que $P(t) \to +\infty$ a medida que $t \to 1/(kP_0)$. A este fenómeno se le denomina *Día del Juicio Final*.

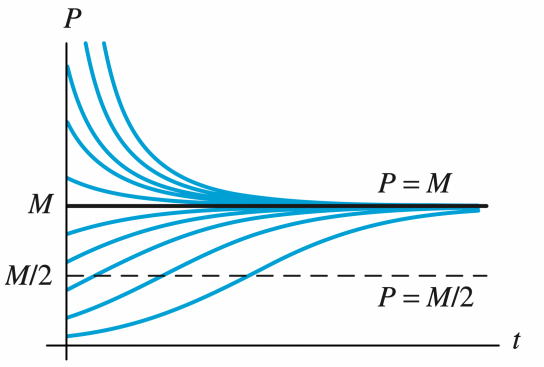
   (b) Suponga que $P_0 = 6$, y que hay 9 conejos después de 10 meses. ¿Cuándo ocurre la explosión demográfica?

   (c) Repita el inciso (a) del problema para el caso $\beta < \delta$. ¿Qué sucede ahora con la población de conejos en el largo plazo?

3. Una población $P(t)$ de pequeños roedores tiene una tasa de nacimientos $\beta = (0.001)\ P$ (al mes por roedor) y una tasa de mortalidad constante δ. Si $P(0) = 100$ y $P'(0) = 8$, ¿cuánto tiempo (en meses) tomará a esta población duplicarse a 200 roedores?

4. (a) Demuestre que si P satisface la ecuación logística
   $$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$
   entonces
   $$P''(t) = 2k^2P\left(P - \frac{1}{2}M\right)(P - M)$$

(b) Concluya que $P'' > 0$ si $0 < P < \frac{1}{2}M$; $P'' = 0$ si $P = \frac{1}{2}M$; $P'' < 0$ si $\frac{1}{2}M < P < M$; y $P'' > 0$ si $P > M$. En particular, se concluye que cualquier curva solución que cruce el umbral $P = M/2$ tiene un punto de inflexión donde cruza esa línea. Esto puede observarse en la siguiente figura:



Estabilidad en modelos no lineales:

5. Justo antes del mediodía se encuentra el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 21 ℃. A las 12 del día la temperatura del cuerpo es de 27 ℃, y a las 1 P.M. de 24 ℃. Considere que la temperatura del cuerpo al morir era de 37 ℃, y que éste se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton. ¿A qué hora murió la víctima?

6. Analice la estabilidad de los puntos críticos de EDO autónoma:

$$x' = x^3(x^2 - 4)$$

7. La dinámica de una población $P(t)$ de aves se describe por la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP(\ell - P)(P - m)$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad, $\ell > 0$ es la población de equilibrio que el medio ambiente puede sostener y $m \in (0, \ell)$ es el umbral de superviencia. Calcule el límite $\lim_{t\to\infty} P(t)$ si la población inicial $P_0 = P(0)$ satisface

(a) $P_0 > \ell$,
(b) $P_0 \in (m, \ell)$
(c) $P_0 \in (0, m)$.

Justifique sus respuestas.

8. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx - x^3.$$

(a) Si $k \leq 0$, demuestre que solamente el valor crítico $c = 0$ de x es estable.
(b) Si $k > 0$, compruebe que el punto crítico $c = 0$ es ahora inestable, pero que los puntos críticos $c = \pm\sqrt{k}$ son estables. Así, la naturaleza cualitativa de las soluciones cambia en $k = 0$ conforme el parámetro k se incrementa.