Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2025

**MAT1640 - Ecuaciones diferenciales ordinarias**
**Examen Final**

1. (a) **(3 puntos)** Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

y determine el intervalo maximal de definición de la solución.

(b) **(3 puntos)** Si un factor integrante de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = x,$$

es $\mu(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ determine
(i) la función $P$,
(ii) la solución general $y = y(x)$.

**Solución.**

(a) Sea $y' = u$. Entonces, $u$ satisface la ecuación lineal separable

$$(1-x^2)u' - 2xu = 0,$$

que resolvemos por separación de variables para obtener

$$u(x) = \frac{c_1}{1-x^2}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Integramos para volver a la variable inicial $y$ o sea

$$y(x) = \frac{c_1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $y(0) = 1$ y $y'(0) = u(0) = 2$ entonces se determinen las constantes $c_1$ y $c_2$ tales que $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$ y por lo tanto la solución del PVI esta dada por

$$y(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + 1$$

con intervalo maximal de definición $(-1, 1)$. Por lo tanto,

$$y(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 1, \quad \text{para } |x| < 1.$$

(b) Notamos que la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = x$ es lineal de primer orden. Entonces un factor integrante está dado por $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ y como $\mu(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ entonces se tiene que $\int P(x)\mathrm{d}x = x^2$ o sea $P(x) = 2x$. Notamos que no se considere constante de integración en este caso por considerar un FI. Así la ecuación diferencial se expresa de la forma $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = x$. Multiplicando por $\mu$ e integrando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{x^2} y\right) = x\mathrm{e}^{x^2},$$

se obtiene

$$y(x) = \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Distribución de puntaje**

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por considerar el cambio de variable y obtener la nueva ecuación diferencial.
- Asignar **(0.5 pt)** por resolver esta nueva ecuación separable en $u$.
- Descontar **(0.25 pt)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por integrar $u$ y obtener la solución $y$ de la ecuación diferencial inicial.
- Asignar **(0.5 pt)** por usar las condiciones iniciales y determinar las constantes $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar la solución del PVI.
- Asignar **(0.5 pt)** por determinar el intervalo maximal de solución.

(b)
- Asignar **(1.5 pts)** por determinar la función $P$ usando la definición de factor integrante. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(1.5 pts)** por resolver correctamente la ecuación diferencial lineal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = x$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.

2. (a) **(2 puntos)** Justifique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.
Existe una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea de la forma $x'(t) = a(t)x(t)$ que tiene como solución $g(t) = t^2$ en todo $\mathbb{R}$.

(b) **(4 puntos)** Sea

$$Y(t) = c_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

la solución general de un sistema $Y' = AY$ para una matriz $A$.
Determine explícitamente este sistema y la matriz $A$.

**Solución.**

(a) **Falsa.** La función $g(t) = t^2$ no puede resolver una ecuación diferencial lineal de primer order homogénea de la forma $x'(t) = a(t)x(t)$ porque sino tendrá que cumplir

$$2t = a(t)t^2,$$

o sea $a(t) = \frac{2}{t}$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. El coeficiente $a(t)$ sólo estaría definido en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Notamos que la matriz $A$ tiene valor propio $\lambda_1 = 1$ con vector propio asociado $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y valor propio $\lambda_2 = -2$ con vector propio $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Una matriz fundamental está dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix},$$

y como satisface $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ entonces $A = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$ o sea

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por lo tanto el sistema está dado por

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x - y. \end{cases}$$

**Otra solución.** Dterminar una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ y vectores propios asociados $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

**Distribución de puntaje**

(a)
- Asignar **(1 pt)** por responder falsa.
- Asignar **(1 pt)** por verificar que la función $g(t) = t^2$ no puede ser una solución para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b)
- Asignar **(1 pt)** por obtener una matrix fundamental $\Phi$ a partir de la expresión de la solución general.
- Asignar **(0.5 pt)** por indicar que $\Phi$ satisface la misma ecuación diferencial que el sistema $\Phi' = A\Phi$.
- Asignar **(1.5 pt)** por determinar correctamente la matriz $A$ calculando $\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(1 pt)** por expresar el sistema explícitamente.

3. (a) **(3 puntos)** Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ la transformada de Laplace de una función $f$ en $s$. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad \text{para } s > 0, a > 0,$$

donde $\mathcal{U}$ es la función escalón unitario.

(b) **(3 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = \sin t + (\sin t) * y(t),$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

**Solución.**

(a) Para demostrar esta propiedad, usamos la definición de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Dado que

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t \geq a, \end{cases}$$

entonces la integral se reduce a

$$\int_a^{+\infty} f(t-a)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Ahora consideramos el cambio de variable $u = t - a$ tal que $du = dt$ y los límites de integración cambian a $u = 0$ cuando $t = a$, y $u \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}(s) &= \int_a^{+\infty} f(t-a)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-s(u+a)}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{-as}\int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-su}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{-as}F(s). \end{aligned}$$

(b) Sea $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ la transformada de Laplace de $y$. Usando las propiedades de la transformada de Laplace aplicada la ecuación diferencial, obtenemos (por linealidad) la ecuación algebraica

$$(s^2+1)Y(s) - 1 = \frac{1}{s^2+1} + \frac{Y(s)}{s^2+1},$$

o sea

$$\Big((s^2+1)^2 - 1\Big)Y(s) = s^2 + 2.$$

Por lo tanto, $Y(s) = \frac{1}{s^2}$ y por la transformada inversa de Laplace, tenemos

$$y(t) = t.$$

**Distribución de puntaje**

(a)
- Asignar **(0.5 pt)** por usar la definición de la transformada de Laplace de la función $f(t-a)U(t-a)$.
- Asignar **(0.5 pt)** por usr la definición de la función escalón y reducir la integral a $[a, +\infty)$.
- Asignar **(1.5 pt)** por calcular la integral $\int_a^{+\infty} f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ usando el cambio de variable $u = t - a$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar $\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\}$.

- Asignar **(1.5 pt)** por aplicar correctamente la transformada de Laplace a la ecuación diferencial usando las condiciones iniciales.
- Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(1 pt)** por obtener la transformada $Y$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error.
- Asignar **(0.5 pt)** por aplicar la transformada de Laplace inversa y obtener correctamente la solución $y$.

4. **(6 puntos)** Considere el sistema diferencial

$$(S_1) \quad \begin{cases} x'(t) = -x - 2t^2y + y^2 + t(1+t^3) + 1 \\ y'(t) = -2y - 2tx + x^2 + 3t^2 + 2t. \end{cases}$$

(a) Considere el cambio de variable $u = x - t$ y $v = y - t^2$ y demuestre que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ satisface el nuevo sistema $(S_2)$ dado por

$$(S_2) \quad \begin{cases} u' = -u + v^2 \\ v' = u^2 - 2v. \end{cases}$$

Encuentre todos los puntos de equilibrio de este nuevo sistema.

(b) Determine el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio $(0,0)$ y clasifíquelo bosquejando su plano de fase.

(c) ¿Qué puede concluir acerca de la estabilidad del punto de equilibrio $(0,0)$ para el sistema no lineal $(S_2)$?

**Solución.**

(a) Sean

$$\begin{cases} u = x - t \\ v = y - t^2. \end{cases} .$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} u' &= x' - 1 = -x - 2t^2y + y^2 + t(1+t^3) \\ &= -(u+t) - 2t^2(v+t^2) + (v+t^2)^2 + t(1+t^3) \\ &= -u + v^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v' &= y' - 2t = -2y - 2tx + x^2 + 3t^2 \\ &= -2(v+t^2) - 2t(u+t) + (u+t)^2 + 3t^2 \\ &= u^2 - 2v. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene el nuevo sistema $(S_2)$ que las nuevas variables satisfacen

$$(S_2) \quad \begin{cases} u' = -u + v^2 \\ v' = u^2 - 2v. \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio satisfacen

$$\begin{cases} -u + v^2 = 0 \\ -2v + u^2 = 0 \end{cases}$$

o sea

$$\begin{cases} u(u^3 - 4) = 0 \\ v(v^3 - 2) = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto los puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

(b) La matriz jacobiana asociada al sistema es

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} -1 & 2v \\ 2u & -2 \end{pmatrix}.$$

En particular

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $-1$ y $-2$ ambos son reales negativos. Por el teorema de Hartman-Grobman, el origen $(0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable (y nodo impropio).
El sistema linealizado es

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = -2v. \end{cases}$$

(c) El punto de equilibrio $(0,0)$ para el sistema no lineal $(S_2)$ es de la misma naturaleza que para el sistema linealizado. Por lo tanto, es asintóticamente estable (y nodo impropio).

**Distribución de puntaje**

(a)
- Asignar **(1.5 pts)** por considerar el cambio de variable indicado y obtener correctamente el nuevo sistema $(S_2)$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error de cálculo.
- Asignar **(1.5 pts)** por determinar correctamente los puntos de equilibrio del sistema $(S_2)$ dados por $(0,0)$ y $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Descontar **(0.5 pt)** si se comete a lo más un error de cálculo.

(b)
- Asignar **(0.5 pt)** por calcular la matriz jacobiana asociada al sistema $(S_2)$
- Asignar **(0.5 pt)** por expresar el sistema linealizado en $(0,0)$.
- Asignar **(0.5 pt)** por clasificar correctamente el punto de equilibrio $(0,0)$.

- Asignar **(0.5 pt)** por bosquejar el plano de fase del sistema linealizado en turno del punto de equilibrio $(0, 0)$

(c) Asignar **(1 pt)** por clasificar correctamente el punto de equilibrio $(0, 0)$ para el sistema inicial $(S_2)$.