PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2016

Interrogación 2
MAT1640 ⋆ ECUACIONES DIFERENCIALES

1. *a*) Determine una solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(9)}-12\,y^{(8)}+64\,y^{(7)}-202\,y^{(6)}+419\,y^{(5)}-594\,y^{(4)}+576\,y^{(3)}-368\,y^{(2)}+140\,y'-24y=0$$

Ayuda: $x^9-12\,x^8+64\,x^7-202\,x^6+419\,x^5-594\,x^4+576\,x^3-368\,x^2+140\,x-24=(x-1-i)^2\,(x-1+i)^2\,(x-1)^3\,(x-2)\,(x-3)$

Solución:
Ocupando la ayuda tenemos que el polinomio característico asociado a la ecuación esta dado por

$$P(\lambda)=(\lambda-1-i)^2\,(\lambda-1+i)^2\,(\lambda-1)^3\,(\lambda-2)\,(\lambda-3)$$

Luego tenemos que las raíces del polinomio son: $\lambda=1+i$ (multiplicidad dos), $\lambda=1-i$ (multiplicidad dos), $\lambda=1$ (multiplicidad tres), $\lambda=2$ y $\lambda=3$ (ambas de multiplicidad 1).
De lo anterior tenemos que:

- Las raíces complejas generan las soluciones

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x\cos(x)\\ y_2 &= e^x\,\mathrm{sen}(x)\\ y_3 &= xe^x\cos(x)\\ y_4 &= xe^x\,\mathrm{sen}(x)\end{aligned}$$

- La raíz $\lambda=1$ generan las soluciones

$$\begin{aligned} y_5 &= e^x\\ y_6 &= xe^x\\ y_7 &= x^2e^x\end{aligned}$$

- las raíces $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$ generan las soluciones

$$\begin{aligned} y_8 &= e^{2x} \\ y_9 &= e^{3x} \end{aligned}$$

Finalmente la solución general de la ecuación esta dada por:

$$y(x) = C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \operatorname{sen}(x) + C_3 x e^x \cos(x) + C_4 x e^x \operatorname{sen}(x) + C_5 e^x + C_6 x e^x + C_7 x^2 e^x + C_8 e^{2x} + C_9 e^{3x}$$

b) Determine una solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}y'' + 2y = \tan(2t) - \frac{1}{2}e^t$$

Solución:

Primero buscamos la solución de la ecuacioón homogenea asociada $\frac{1}{2}y'' + 2y = 0$. El polinomio característico es $P(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + 2$ cuyas raíces son $\lambda = \pm 2i$. Luego la solución de la ecuación homogenea y_h esta dada por

$$y_h(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)$$

Para encontrar una solución particular encontramos soluciones particulares para los problemas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y'' + 2y &= \tan(2t) \qquad (1) \\ \frac{1}{2}y'' + 2y &= \frac{1}{2}e^t \qquad (2) \end{aligned}$$

- Ocupamos variación de parámetros para encontrar una solución de (1) de la forma $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ donde $y_1 = \cos(2x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(2x)$. Sabemos que u_1 y u_2 deben cumplir

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= \tan(2t) \end{aligned}$$

Luego si $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \operatorname{sen}(2x) \\ -2\operatorname{sen}(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2$, $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \tan(2t) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(2x) \\ \tan(2t) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}(2x)\tan(2t)$ y $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \tan(2t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\operatorname{sen}(2x) & \tan(2t) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(2x)$

De lo anterior

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W} dx \\ &= -\int \frac{\operatorname{sen}(2x)\tan(2t)}{2} dx \\ &= 1/4\,\sin(2\,x) - 1/4\,\ln(\sec(2\,x) + \tan(2\,x)) \\ u_2 &= \int \frac{W_2}{W} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} dx \\ &= -\frac{\cos(2x)}{4} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}(2t) - \ln(\sec(2t) + \tan(2t))\right)\cos(2t) - \frac{\cos(2t)\operatorname{sen}(2t)}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\ln(\sec(2t) + \tan(2t)) \end{aligned}$$

- Ocupamos coeficientes indeterminados para encontrar una solución de (2) de la forma $y_p = Ae^t$. Reemplazando tenemos que

$$\frac{A}{2}e^t + 2Ae^t = \frac{1}{2}e^t \Rightarrow A = \frac{1}{5} \Rightarrow y_p = \frac{1}{5}e^t$$

Finalmente tenemos que la solución genereal del problema esta dado por

$$y(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{4}\ln(\sec(2t) + \tan(2t)) - \frac{1}{5}e^t$$

2. Una masa de 1 kg se une a un resorte de constante $\frac{25}{4}$. En el instante $t = 0$, la masa se comprime 0,05 m desde la posición de equilibrio y se libera. En este mismo instante se aplica una fuerza externa $F(t) = 697\cos(t)$ N al sistema. Si la constante de amortiguamiento para el sistema es 4 N/s, determine la ecuación de movimiento para la masa. Analice el comportamiento de la solución a medida el tiempo avanza.

Solución:

Tenemos que la ecuación diferencial que modela el problema es de la forma

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}$$

Del enunciado sabemos que $m = 1$, $b = 4$ y $k = \frac{25}{4}$. Reemplazando en la ecuación tenemos que

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + \frac{25}{4}x = 697\cos(t),\ \text{con } x(0) = -0,05,\ \dot{x}(0) = 0$$

Sabemos que la solución de la ecuación es de la forma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ donde $x_h(t)$ es la solución de la ecuación homogenea asociada y $x_p(t)$ es una solución particular cualquiera.

Resolvemos primero $\ddot{x}+4\dot{x}+\frac{25}{4}x = 0$. El polinomio caracteristico es $P(\lambda) = \lambda^2+4\lambda+\frac{25}{4}$ que tiene por raices $\lambda = -2 \pm \frac{3}{2}i$. Luego $x_h(t) = e^{-2t}\left(A\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$

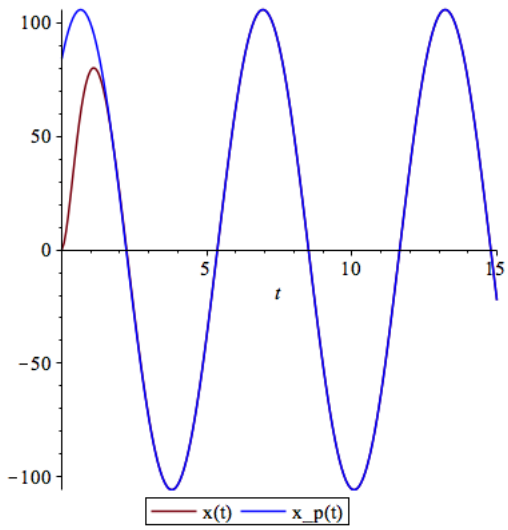
Ocupando el metodo de los coefecientes indeterminados tenemos que $x_p(t) = C_1\cos(t)+ C_2\,\text{sen}(t)$. Derivando y luego reemplazando tenemos que $C_1 = 84$ y $C_2 = 64$, por lo tanto

$$x(t) = e^{-2t}\left(A\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 84\cos(t) + 64\,\text{sen}(t)$$

Imponiendo las condiciones iniciales tenemos que $A = -84,05$ y $B = -2321/15 =\approx -154,73$. Finalmente tenemos que

$$x(t) = e^{-2t}\left(-84,05\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - 154,73\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)\right) + 84\cos(t) + 64\,\text{sen}(t)$$

Podemos ver que a medida que t avanza la solución x_h tiene a 0 y, por lo tanto, $x(t)$ tiende a parecerse a $x_p(t)$ (solución estacionaria) lo que se muestra en la siguiente figura.


100
50
0
−50
−100
5
10
15
t
x(t)
x_p(t)

3. *a*) Calcule $\mathcal{L}\left(|\cos(t)|\right)$.

   b) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s+16}{s^2+4s+13}\right)$.

Solución:

a) Notemos que la función $|\cos(t)|$ es periodica con periodo π. Luego es inmediato que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(|\cos(t)|\right) &= \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-st}|\cos(t)|dt}{1-e^{-\pi s}} \\ &= \frac{\left(2\,\mathrm{e}^{1/2\,\pi\,s}+s\mathrm{e}^{\pi\,s}-s\right)\mathrm{e}^{-\pi\,s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\end{aligned}$$

b) Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{2s+16}{s^2+4s+13} &= \frac{2s+16}{s^2+4s+4+9} \\ &= \frac{2s+16}{(s+2)^2+9} \\ &= \frac{2s+4+12}{(s+2)^2+9} \\ &= 2\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+4\frac{3}{(s+2)^2+9}\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+16}{s^2+4s+13}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(2\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+4\frac{3}{(s+2)^2+9}\right) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right) \\ &= 2e^{-2t}\cos(3t)+4e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\end{aligned}$$

4. Resuelva

$$y'' - y' = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 3, \\ \\ t & \text{si } t > 3. \end{cases}$$

con $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Solución:

Si $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 3, \\ \\ t & \text{si } t > 3. \end{cases}$, entonces aplicando transformada de laplace a la ecuación tenemos

$$\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(f(t))$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^3 e^{-st}dt + \int_3^\infty te^{-st}dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^3 + \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_3^\infty \\ &= \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2} \end{aligned}$$

Al mismo resultado se llega si escribimos

$$f(t) = 1+2u(t-3)+(t-3)u(t-3) \Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(1)+2\mathcal{L}(u(t-3))+\mathcal{L}((t-3)u(t-3))$$

Aplicando transformada de laplace al lado izquierdo tenemos que

$$\mathcal{L}(y'' - y') = \mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y') = s^2\mathcal{L}(y) - s - 2 - s\mathcal{L}(y) + 1 = \mathcal{L}(y)(s^2 - s) - s - 1$$

Luego

$$\mathcal{L}(y)(s^2 - s) - s - 1 = \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

De donde

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-s} + \frac{1}{s(s^2-s)} + 2\frac{e^{-3s}}{s(s^2-s)} + \frac{e^{-3s}}{s^2(s^2-s)}$$

Haciendo fracciones parciales tenemos que

- $\frac{1}{s^2-s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$
- $\frac{1}{s(s^2-s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$
- $\frac{1}{s^2(s^2-s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}$

De lo anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y) &= \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + 2\frac{e^{-3s}}{s-1} - 2\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s-1} - \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} \\
&= \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + 3\frac{e^{-3s}}{s-1} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} \\
&\Rightarrow \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s-1}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right) \\
&\quad -3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s^3}\right) \\
&= 3e^t - 2 - t + 3u(t-3)e^{t-3} - 3u(t-3) - 3u(t-3)(t-3) - u(t-3)\frac{(t-3)^2}{2}
\end{aligned}$$

TIEMPO: 120 minutos
Sin consultas
Justifique todas sus respuestas