MAT1640 – ECUACIONES DIFERENCIALES
Interrogación 1

1. (a) Encuentre los puntos críticos para la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cos y. \quad \textbf{2 puntos}$$

(b) Consideremos el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \cos y, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Demuestre que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ dado, el problema (1) tiene única solución local. **4 puntos**

Solución.

(a) Sea $f(y) = y^2 \cos y$. Entonces los puntos de equilibrio son $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

(b) La existencia y unicidad de la solución local del problema (1) sigue del hecho que la función $f(t, y) = y^2 \cos y$, $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, es continua y continuamente diferenciable con respecto a y en todo el plano $\mathbb{R}^2$ y, en particular, en cualquier entorno del punto $(0, y_0)$.

Si y_0 coinincide con algún punto de equilibrio, entonces $y(t) \equiv y_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. (a) Para $x > 0$ consideramos la ecuación diferencial

$$\mathrm{e}^{y^2}\left(2yy' + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x^2}. \tag{2}$$

Demuestre que el cambio de variables $u = \mathrm{e}^{y^2}$ transforma la ecuación diferencial (2) en una ecuación diferencial lineal y determine la solución general implícita para (2). **3 puntos**

(b) Resuelva el PVI siguiente

$$\begin{cases} \left(3x^2y + 2x - y^2\cos x\right)\mathrm{d}x + \left(x^3 - 2y\sin x - \ln y\right)\mathrm{d}y = 0, \\ y(0) = \mathrm{e}. \end{cases}$$ **3 puntos**

Solución.

(a) Si $u = \mathrm{e}^{y^2}$ entonces $u' = 2y\ \mathrm{e}^{y^2}y'$, reemplazando en la ecuación (2) obtenemos

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2}$$

que es una ecuación diferencial lineal cuya solución general está dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int 2/x\,dx}\left[C + \int \frac{1}{x^2}e^{\int 2/x\,dx}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{x^2}(C + x) \\ &= \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Finalmete la solución general implícita de la ecuación (2) es

$$\mathrm{e}^{y^2} = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) La ecuación es equivalente a

$$M(x.y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

donde $M(x.y) = 3x^2 + 2x - y^2\cos x$ y $N(x,y) = x^3 - 2y\sin x - \ln y$.

Como $\partial_y M(x.y) = 3x^2 - 2y\cos x = \partial_x N(x,y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación diferencial es exacta y su solución general es dada por $f(x,y) = C$ donde f es una función a determinar tal que

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2y + 2x - y^2\cos x, \tag{3}$$

$$\partial_y f(x,y) = x^3 - 2y\sin x - \ln y. \tag{4}$$

Integrando (3) con respecto a x obtenemos que

$$f(x,y) = x^3y + x^2 - y^2\sin x + g(y), \tag{5}$$

para alguna función g por determinar derivando (5) con respecto a y

$$x^3 - 2y\sin x + g'(y) = x^3 - 2y\sin x - \ln y$$

Entonces $g(y) = y - y\ln y$. Así la ecuación

$$x^3y + x^2 - y^2\sin x + y - y\ln y = C,$$

definie implícitamente la solución de la ecuación diferencial. Tomando en cuenta la condición inicial, encontramos que debe ser $C = 0$. Finalmente la ecuación

$$x^3y + x^2 - y^2\sin x + y - y\ln y = C,$$

es solución del PVI considerado.

3. Consideramos el PVI siguiente

$$\begin{cases} y' = x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinar dos soluciones distintas de este PVI. **4 puntos**

(b) ¿Porque no contradice el Teorema de existencia y unicidad de soluciones? **2 puntos**

Solución.

(a) Notamos que $y(t) \equiv 1$ es soluciones y cumple la condición inicial. Para determinar la otra solución, resolvemos la ecuación por separación de variables tal que

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^{\frac{1}{3}}} = \int x^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x,$$

o sea

$$\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Usando la condición inicial tenemos $C = 0$ y luego

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2\sqrt{2}}.$$

(b) Esto no contradice el Teorema de existencia y unicidad porque a pesar que la funci+on

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}},$$

es continua, su derivada

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3(y-1)^{\frac{2}{3}}},$$

no es continua en $y = 1$ y así no podemos asegurar la unicidad.

4. Supongamos que la población P de bacterias en un cultivo al tiempo t cambia a una razón proporcional a $P - 100$. Es decir

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = k(P - 100).$$

(a) Obtener la solución general de la ecuación diferencial si sabe que hay 1000 bacterías al tiempo $t = 0$ horas y 500 para $t = 5$ horas. **4 puntos**

(b) Cuántas bacterías habrá para $t = 10$ horas. **2 puntos**

Solución.

(a) Notamos que la ecuación que la población de bacterias satisface es una ecuación de variables separables, luego

$$\frac{dP}{P - 100} = k\,dt$$

integrando esta última igualdad se tiene que

$$P(t) = Ce^{kt} + 100.$$

Tenemos que

$$\boxed{\begin{matrix} P(0) = 1000 \\ P(5) = 500 \end{matrix}} \quad \text{entonces} \quad \boxed{\begin{matrix} C + 100 = 1000 \\ Ce^{5k} + 100 = 500 \end{matrix}}$$

De donde $C = 900$ y $k = \dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{4}{9}\right)$, luego

$$P(t) = 900e^{(1/5)\ln(4/9)t} + 100.$$

(b) Después de 10 horas habrá $P(10) = 900e^{(1/5)\ln(4/9)\cdot 10} + 100 \approx 278$ bacterias.