PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

MAT1640 – ECUACIONES DIFERENCIALES
Interrogación 3

1. Sea dado el sistema

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule la matriz e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Determinar la solución general del sistema.

Solución.

(a) El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(X) = det(A - XI) = X^2 + 1,$$

y los valores propios son $\lambda_\pm = \pm i$. Por el método de los vectores propios, construimos una matriz fundamental del sistema. Los vectores propios asociados a $\lambda_\pm$ son respectivamente $v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Así, una matriz fundamental del sistema es

$$\Phi(t) = \Re\begin{pmatrix} v_+\mathrm{e}^{it} & v_-\mathrm{e}^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

La matriz exponencial en este caso de matriz asociada constante, corresponde a la matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisface que $\Phi(0) = I$.
Por lo tanto,

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(b) La solución general del sistema es

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Distribucipon de puntaje.

(a) Calcular la matriz e^{tA}, **4 puntos**.
- Calcular el polinomio característico, **0.5 punto**.
- Los valores propios, **0.5 punto**.
- Los vectors propios, **1 punto**.
- Matriz fundamental,
- Matriz exponencial, argumentar $\Phi(0) = I$, **2 puntos**.

(b) Expresar la solución general, **2 puntos**.

2. Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la función vectorial $F(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}$. Resuelva el Problema de valor inicial $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = M\mathbf{Y} + \mathbf{F}(t)$ con $\mathbf{Y}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solución 1. El polinomio característico de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es $P_M(X) = X^2$. Luego $\lambda = 0$ es el único valor propio de la matriz. La multiplicidad geometrica de $\lambda = 0$ es 1 y una base para su espacio propio asociado es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Falta encontrar un vector propio generalizado v_2 de M tal que v_2 es linealmente independiente de v_1 y satsiface,

$$M^2 v_2 = 0.$$

como M^2 es igual a la matriz nula entonces sufice de elegir por ejemplo,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y podemos elegir como base del espacio propio generalizado $(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Por lo tanto, una matriz fundamental del sistema es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -t+1 \end{pmatrix}.$$

Luego la formula de Duhamel nos permite de obtener la solución del sistema no homogéneo tal que

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \ln|t| + 3t + 2 \\ \ln|t| + 3t - 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Distribucipon de puntaje.

- Calcular una matriz fundamental, **2 puntos**.
- Calcular la matriz exponencial, **1 punto**.
- Expresar la formula de Duhamel, **1 punto**.
- Calcular $\mathrm{e}^{(t-s)M}$ y $\mathrm{e}^{tM}\mathbf{Y}(1)$, **1 punto**.
- Solución del PVI, **1 punto**.

Solución 2. Notamos que la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es nilpotente de orden 2 así la matriz exponencial es

$$\mathrm{e}^{tM} = I + tM = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema no homogéneo usando la formula de Duhamel

$$\mathbf{Y}(t) = \int_1^t \mathrm{e}^{(t-s)M} F(s)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{tM}\mathbf{Y}_0, \quad \text{donde } \mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix},$$

para un vector $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Por un calculo simple, obtenemos que

$$\mathrm{e}^{(t-s)M}\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}(s),$$

y luego la solución general del sistema es

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} (\alpha-\beta)t + \alpha + \ln|t| \\ (\alpha-\beta)t + \beta + \ln|t| \end{pmatrix},$$

y determinamos α y β por la condición inicial del problema $\mathbf{Y}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces la solución del PVI es

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 3t - 1 + \ln|t| \\ 3t - 4 + \ln|t| \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Distribucipon de puntaje.

- Mostrar que M es nilpotente de orden 2, **2 puntos**.
- Calcular la matriz exponencial, **1 punto**.
- Expresar la formula de Duhamel, **1 punto**.
- Calcular $\mathrm{e}^{(t-s)M}$ y Y_0, **1 punto**.
- Solución del PVI, **1 punto**.

3. (a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones casi lineal

$$\begin{cases} x' = xy - 2 \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Determinar los puntos de equilibrio y clasifique su estabilidad según estable o inestable.

(b) Determina la matriz B tal que

$$\mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{t} & 3\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{t} & 3\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Solución.

(a) Las soluciones de equilibrios son (1.2) y $(-1, -2)$. el jacobiano el punto (x, y) es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- En el punto (1.2)

$$J(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det J(1, 2) = -5 < 0$$

(1.2) **es un punto silla inestable**.

- En el punto $(-1. - 2)$

$$J(-1, -2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det J(-1, -2) = 5 > 0$$

$(-1, -2)$ **es punto espiral (asintóticamente) estable**.

Distribucipon de puntaje.

- Calcular los puntos de equilibrio, **0.5 punto**.
- Calcular el jacobiano, **0.5 punto**.
- Clasificar cada punto justificandolo, **2 punto** (1 punto para cada punto de equilibrio con justificación Teorema H-G).

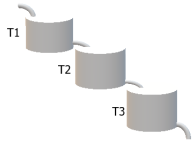
(b) Recordamos que e^{tB} es una matriz fundamental que cumple $\Phi'(t) = B\Phi(t)$. Para $t = 0$, tenemos $\mathrm{e}^{0B} = I$ y

$$B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{e}^{tB}|_{t=0} = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{t} + 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{t} + 2\mathrm{e}^{2t} & 4\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} \\ 6\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{t} & 6\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{t} & 6\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} |_{t=0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Distribucipon de puntaje.

- Argumentar que e^{tB} es una matriz fundamental tal que $\Phi'(t) = B\Phi(t)$ y $\Phi(0) = I$, **0.5 punto**.
- Derivar la matriz exponencial $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tB}$, **1.5 puntos**.
- Evaluar la derivada en 0 y deducir la matriz B, **1 punto**.

4. Considere un sistema de 3 tanques con una mezcla homogénea de sal con agua. Denotamos por $x_i(t)$ la cantidad de sal en kilos que contiene cada tanque i para $i \in \{1, 2, 3\}$, en el tiempo t medido en minutos. El volumen de agua en litros en cada tanque i se denota por V_i. Al primer tanque entran 10 $\ell.\,\mathrm{min}^{-1}$ de agua fresca y conduce 10 $\mathrm{min}\,.s^{-1}$ al segundo tanque. Este otro tanque libera 10 $\ell.min^{-1}$ al tercero y se extraen 10 $\ell.min^{-1}$ de este último.



Calcule la cantidad de sal que contiene cada tanque pasados 10 minutos, sabiendo que al principio los volumenes de agua y cantidades de sal en cada tanque son

$$V_1 = 20\ell, \quad V_2 = 50\ell, \quad V_3 = 100\ell,$$

$$x_1(0) = 4kg, \quad x_2(0) = 2kg, \quad x_3(0) = 1kg,$$

Solución. El sistema correspondiente a los tres tanques conectados es

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1 \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ x_3' &= k_2 x_2 - k_3 x_3 \end{aligned}$$

donde $k_i = \frac{10}{V_i}$. La matriz T asociada al sistema es

$$T == \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Como T es una matriz triangular entonces sus valores propios son sus elementos diagonales

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{5}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{10},$$

y los vectores propios asiociados son respectivamente

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces una matriz fundamental del sistema es

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & -2\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix}.$$

Aplicamos las condiciones iniciales para determinar la solución del PVI tal que

$$\Psi(0) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y obtenemos el vector $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{26}{3} \\ 15 \end{pmatrix}$. Así la solución del PVI es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \Psi(t) \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{26}{3} \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ -\frac{20}{3}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + \frac{26}{3}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \\ \frac{10}{3}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \frac{52}{3}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 15\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix}.$$

En particular, la cantidad de sal que hay en cada tanque después de 10 minutos es

$$\begin{aligned} x_1(10) &= 4\ \mathrm{e}^{-5} \\ x_2(10) &= -\frac{20}{3}\mathrm{e}^{-5} + \frac{26}{3}\mathrm{e}{-2} \\ x_3(10) &= \frac{10}{3}\ \mathrm{e}^{-5} - \frac{52}{3}\ \mathrm{e}^{-2} + 15\ \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

Distribucipon de puntaje.

- Plantear el sistema, **1 punto**.
- Encontrar una matriz fundamental, **1.5 punto**.
- Aplicar las condiciones inciales, **1 punto**.
- Solución del PVI, **1 punto**.
- Determinar la cantidad de sal en cada tanque después de 10 minutos, **1.5 puntos** (0.5 punto para cada tanque).