PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

MAT1640
I3-2014/2

Interrogación 3 de Ecuaciones Diferenciales

8 de noviembre de 2014

1. (a) Probar que para $k > 0$ las transformadas de Laplace de las funciones $f(t) = \text{sen}(kt)\cosh(kt)$ y $g(t) = \cos(kt)\text{senh}(kt)$ son

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \frac{k(\lambda^2 + 2k^2)}{\lambda^4 + 4k^4} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}g(\lambda) = \frac{k(\lambda^2 - 2k^2)}{\lambda^4 + 4k^4}. \quad (2)$$

Solución: Sea $E_c(t) = \exp(ct)$, donde c es un número complejo. E_c admite una transformada de Laplace $\mathcal{L}E_c(\lambda) = 1/(\lambda - c)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\Re\lambda > \Re c$. Las transformadas de Laplace de f y g se obtienen a partir de combinaciones lineales de $\mathcal{L}E_c(\lambda)$ usando los valores $(\pm 1 \pm i)k$ para c. De este modo se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(\lambda) &= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{\lambda - (1+i)k} - \frac{1}{\lambda - (1-i)k} + \frac{1}{\lambda - (-1+i)k} - \frac{1}{\lambda - (-1-i)k}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{(i+1)k(\lambda^2 + 2ik^2) + (i-1)k(\lambda^2 - 2ik^2)}{(\lambda^2 - 2ik^2)(\lambda^2 + 2ik^2)}\right] \\
&= \frac{k(\lambda^2 + 2k^2)}{\lambda^4 + 4k^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}g(\lambda) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda - (1+i)k} - \frac{1}{\lambda - (-1+i)k} + \frac{1}{\lambda - (1-i)k} - \frac{1}{\lambda - (-1-i)k}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(i+1)k(\lambda^2 + 2ik^2) + (i-1)k(\lambda^2 - 2ik^2)}{(\lambda^2 - 2ik^2)(\lambda^2 + 2ik^2)}\right] \\
&= \frac{k(\lambda^2 - 2k^2)}{\lambda^4 + 4k^4}
\end{aligned}$$

(b) Usando la transformación de Laplace, resolver la ecuación integro-diferencial

$$\frac{dx}{dt} + 6x(t) + 9\int_0^t x(s)ds = 1,\ x(0) = 0.$$

Solución: Tomando transformada de Laplace en ambos miembros se tiene

$$(\lambda + 6 + \frac{9}{\lambda})\mathcal{L}x(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

ecuación que tiene sentido si $\Re\lambda > 0$. Bajo esta condición, despejando $\mathcal{L}x(\lambda)$, se deduce

$$\mathcal{L}x(\lambda) = \frac{|}{\lambda^2 + 6\lambda + 9} = \frac{1}{(\lambda+3)^2} = -\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda+3}.$$

La última expresión de la derecha corresponde a la transformada de Laplace de la función $t \mapsto t\exp(-3t)$. Luego la solución de la ecuación es $x(t) = t\exp(-3t)$.

2. Considerar el sistema

$$X' = AX,$$

donde la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Demuestre que la solución general de este sistema se escribe en la forma:

$$\phi(t) = e^{\lambda t}\left(\cos(\omega t)\mathbf{1} + \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{J}_\omega\right)C,$$

donde C es un vector constante, $\mathbf{1}$ es la matriz identidad y $\mathbf{J}_\omega$ es la matriz

$$\mathbf{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: Nótese que $A = \lambda\mathbf{1} + \mathbf{J}_\omega$, que es una suma de dos matrices que conmutan, de modo que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = e^{\lambda t}e^{\mathbf{J}_\omega t}.$$

El cálculo de las potencias de $\mathbf{J}_\omega$ nos da:

$$\mathbf{J}_\omega{}^2 = (-1)\omega^2\mathbf{1},$$

y de ahí resulta

$$\mathbf{J}_\omega^n = \begin{cases} (-1)^k\omega^{2k}\mathbf{1} \text{ si } n = 2k \\ (-1)^k\omega^{2k}\mathbf{J}_\omega \text{ si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Luego, desarrollando la serie, $e^{\mathbf{J}_\omega t} = \cos(\omega t)\mathbf{1} + \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{J}_\omega$ y la solución general de la ecuación se escribe en la forma

$$\phi(t) = e^{\lambda t}\left(\cos(\omega t)\mathbf{1} + \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{J}_\omega\right)C,$$

3. (a) Resolver

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución: La ecuación característica se escribe

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0,$$

de modo que hay dos valores propios reales $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, distintos. Para encontrar una base de soluciones del sistema, buscamos un vector propio para cada uno de los valores propios anteriores.

Sea $v_i = \begin{pmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \end{pmatrix}$ el vector propio correspondiente a λ_i, $i = 1, 2$. Para $i = 1$ se obtiene la ecuación $3v_{1,x} + 3v_{1,y} = 0$ de la cual escogemos $v_{1,x} = 1$ y $v_{2,y} = -1$ como solución. Para $i = 2$, la ecuación es $-2v_{2,x} + 3v_{2,y} = 0$ y basta escoger $v_{2,x} = 3/2$, $v_{2,y} = 1$. Luego, la base de soluciones del sistema es:

$$\phi_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como la solución general se escribe en la forma $\phi(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_2\phi_2(t)$, la solución del problema con valores iniciales se obtiene despejando los coeficientes α de la condición

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix},$$

de donde resulta $\alpha_1 = -3/5$, $\alpha_2 = 2/5$ y la solución del problema con valores iniciales es

$$\phi(t) = -\frac{3}{5}e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}e^{4t} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Resolver

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Solución: La ecuación característica correspondiente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Luego A posee un valor propio de multiplicidad 2, y se tiene

$$(A - 2\mathbf{1})^2 = 0.$$

En este caso la condición inicial es el vector

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

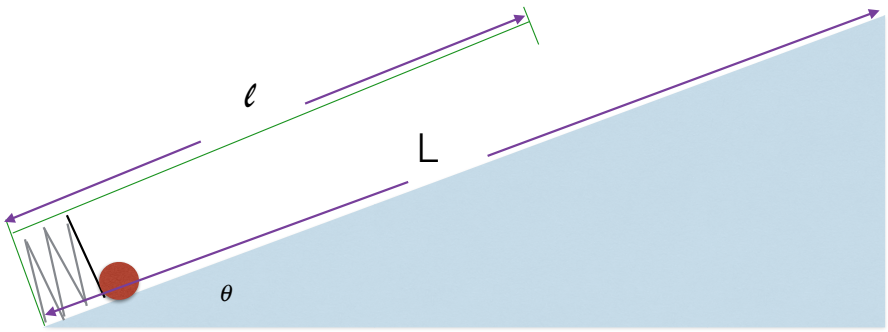
Luego la solución del problema con valores iniciales es

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{tA}\phi(0) \\ &= e^{2t}e^{t(A-2\mathbf{1})}\phi(0) \\ &= e^{2t}\left[\mathbf{1} + t(A - 2\,\mathbf{1})\right]\phi(0) \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}\phi(0) \end{aligned}$$

Luego, la solución es

$$\phi(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}.$$

4. Se dispone de una tabla rectangular inclinada cuyo lado mayor es L formando éste un ángulo θ con respecto a la horizontal. En el vértice de ese ángulo se ha colocado un tubo que reposa sobre el plano inclinado y contiene un resorte empotrado por su extremidad inferior, de largo ℓ y coeficiente de elasticidad lineal $k = 1$. En el instante inicial el resorte está completamente comprimido y sostiene una esfera de radio pequeño en su extremidad libre, asimilada a un punto de masa $m = 1$ concentrada en su centro de masa. Tomamos como origen de coordenadas la posición del centro de masa de la esfera en ese momento (resorte completamente comprimido). Se suelta la esfera y es empujada hacia arriba por el tubo debido a la acción del resorte. Un tope puesto en el tubo impide que el resorte se estire en una magnitud superior a ℓ. Llame $x(t)$ a la posición del centro de masa de la esfera en el instante t.



(a) Plantear las ecuaciones del movimiento en ausencia de roce. Establezca una primera condición entre las magnitudes ℓ y θ para que la esfera avance empujada por el resorte.

Solución: Llamamos T_1 el tiempo en que la esfera se despega del resorte, T_2 el tiempo en que alcanza el borde superior del plano y empieza su caída libre. Tenemos dos situaciones distintas:

(i) Para $0 \leq t \leq T_1$, las fuerzas que actúan son las del resorte y la componente del peso $mg \operatorname{sen} \theta$ en la dirección del plano, orientada hacia abajo. Teniendo en cuenta los valores de las constantes, la ecuación de Newton se escribe

$$x'' = 1 \times (\ell - x) - g \operatorname{sen} \theta.$$

Tenemos entonces un primer problema con valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + x = \ell - g \operatorname{sen} \theta \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Llamando $A = \ell - g \operatorname{sen} \theta$, para que la esfera avance, es necesario que $A \geq 0$. Es

decir, se debe cumplir la condición:

$$\ell - g \operatorname{sen}\theta \geq 0. \tag{4}$$

Esta condición se supone satisfecha en lo que sigue y, como θ debe ser un ángulo del primer cuadrante, debe cumplir que

$$\theta \leq \operatorname{Arcsen}\left(\frac{\ell}{g}\right).$$

(ii) Para $T_1 \leq t \leq T_2$, sólo actúa la fuerza $-g \operatorname{sen}\theta$, luego se tiene el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} x'' = -g \operatorname{sen}\theta \\ x(T_1) = \ell \\ x'(T_1) = x'(T_1-), \end{cases} \tag{5}$$

donde $x'(T_1-)$ es la velocidad del móvil que se calcula al llegar a T_1 usando la ecuación (3).

(b) Determinar el tiempo T_1 necesario para que la esfera se despegue del resorte.

Solución: Procedemos a resolver el problema con valores iniciales (3). Dado que la ecuación característica de la ecuación homogénea es $\lambda^2 + 1 = 0$, la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$

y una solución particular de la no homogénea es fácil de obtener por inspección: basta reemplazar la constante A. Luego la solución general se escribe en la forma

$$\varphi(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + A$$

Luego, usando las condiciones iniciales se encuentra $c_1 = -A$, $c_2 = 0$, de modo que

$$\varphi(t) = A(1 - \cos t),$$

es la solución del problema con valores iniciales (3).
Para encontrar T_1 hacemos $\varphi(T_1) = \ell$ obteniendo:

$$T_1 = \operatorname{Arcos}\left(1 - \frac{\ell}{A}\right).$$

Nótese que la velocidad en ese tiempo es entonces

$$\varphi'(T_1) = A \operatorname{sen} T_1 = \sqrt{\ell^2 - 2\ell g \operatorname{sen}\theta}.$$

(c) ¿Qué relación deben cumplir ℓ, L,θ para que la esfera, separándose del resorte, alcance en su movimiento la extremidad superior del plano inclinado y caiga verticalmente enseguida?

Solución: Resolvamos ahora el problema con valores iniciales (5). Nótese que para que la esfera siga avanzando después del tiempo T_1 se necesita que su velocidad en ese instante sea estrictamente positiva, es decir, usando el cálculo final de la pregunta anterior, se debe cumplir la condición

$$\ell^2 - 2\ell g \operatorname{sen}\theta > 0, \tag{6}$$

que teniendo en cuenta la restricción que ya teníamos en θ, nos lleva a

$$\theta < \operatorname{Arcsen}\left(\frac{\ell}{2g}\right).$$

Enseguida, usando las condiciones iniciales e integrando dos veces se tiene

$$\varphi(t) = (-g\operatorname{sen}\theta)\frac{(t-T_1)^2}{2} + \sqrt{\ell^2 - 2\ell g\operatorname{sen}\theta}(t-T_1) + \ell.$$

Para que se alcance el borde del plano y luego la esfera caiga libremente, es necesario y suficiente que $\varphi(T_2) = L$ y $\varphi'(T_2) = 0$. Es decir, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (-g\operatorname{sen}\theta)\frac{(T_2-T_1)^2}{2} + \sqrt{\ell^2 - 2\ell g\operatorname{sen}\theta}(T_2-T_1) &= L-\ell \qquad (7)\\ (-g\operatorname{sen}\theta)(T_2-T_1) + \sqrt{\ell^2 - 2\ell g\operatorname{sen}\theta} &= 0. \qquad (8) \end{aligned}$$

De (7) y (8) obtenemos

$$T_2 - T_1 = \sqrt{\frac{2(L-\ell)}{g\operatorname{sen}\theta}}.$$

Igualando este valor con el que se obtiene usando sólo la ecuación (8), a saber, $T_2 - T_1 = \dfrac{\sqrt{\ell^2 - 2\ell g\operatorname{sen}\theta}}{g\operatorname{sen}\theta}$, se llega a

$$2(L-\ell)g\operatorname{sen}\theta = \ell^2 - 2\ell g\operatorname{sen}\theta.$$

Luego, la condición requerida es

$$\ell^2 = 2gL\operatorname{sen}\theta. \tag{9}$$