Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2023

Ecuaciones Diferenciales ⋆ MAT1640

Interrogación 3

1. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. La ecuación característica de esta ecuación está dada por

$$(4-r)^2 + 9 = 0$$

que tiene por soluciones $r = 4 + \pm 3i$.

Para $r = 4 + 3i$ el problema vectores propios queda dado por:

$$\begin{bmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tiene como solución (particular) al vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

De lo anterior, la solución general de esta ecuación es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(3t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(3t) \right) + c_2 e^{4t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(3t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(3t) \right)$$

Aplicando la condición inicial, la solución estará dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{4t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(3t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(3t) \right) + e^{4t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(3t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(3t) \right) \\ &= e^{4t} \begin{bmatrix} \cos(3t) - \sin(3t) \\ \cos(3t) + \sin(3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente la ecuación característica.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente uno de los valores propios.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente el otro valor propio.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente la parte real del vector propio (particular) asociado. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y determina un vector propio (correctamente) para el valor propio encontrado, asignar (**0.25 ptos**) por la parte real del vector propio.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente la parte imaginaria del vector propio (particular) asociado. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y determina un vector propio (correctamente) para el valor propio encontrado, asignar (**0.25 ptos**) por la parte imaginaria del vector propio.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente una de las soluciones l.i. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y de ahí en adelante no comete ningún error, asignar (**0.5 ptos**) por una de las soluciones l.i.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente la otra solución l.i. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y de ahí en adelante no comete ningún error, asignar (**0.5 ptos**) por una de las soluciones l.i.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente la solución al PVI. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y de ahí en adelante no comete ningún error, asignar (**0.5 ptos**) por determinar la solución al PVI.

2. Considere, para $r > 2$, el problema con valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t^r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_0, \quad t > 0$$

(a) Calcule la solución general del sistema.

(b) Determine todas las condiciones iniciales $\mathbf{x}_0$ para las que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ existe.

Solución. HOLA

a) **Opción 1:** Buscamos primero las soluciones del sistema homogéneo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad t > 0.$$

Si A es la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$, entonces la ecuación característica es

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= (3-\lambda)(-3-\lambda) + 9 \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Por lo que A tiene como único valor propio $\lambda = 0$. Para encontrar sus vectores propios asociados resolvemos el sistema $A\mathbf{v} = 0$, que tiene como solución $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Elegimos el vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Resolvemos el sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, cuya solución es $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Elegimos $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Con esto, dos soluciones LI del sistema homogéneo son $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 3t-1 \end{bmatrix}$, y la matriz fundamental asociada es $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t-1 \end{bmatrix}$. De esta forma, la solución del sistema viene dado por la fórmula de variación de parámetros,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt.$$

Se tiene que

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3t-1 & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3t & t \\ 3 & -11 \end{bmatrix},$$

Por lo que

$$\int \Phi(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt = \int \begin{bmatrix} 1-3t & t \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-r} \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} t^{1-r} \\ -t^{-r} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} \\ \dfrac{-t^{1-r}}{1-r} \end{bmatrix}$$

Así, la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} \\ \dfrac{-t^{1-r}}{1-r} \end{bmatrix} = \Phi(t)\mathbf{c} + \begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} - \dfrac{t^{2-r}}{1-r} \\ \dfrac{3t^{2-r}}{2-r} - \dfrac{3t^{2-r}}{1-r} + \dfrac{t^{1-r}}{1-r} \end{bmatrix}, \quad t > 0$$

Opción 2: Notamos que $A^2 = 0$, por lo que $e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ 9t & 1-3t \end{bmatrix}$. La solución viene dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c} + e^{At}\int e^{-At}\mathbf{f}(t)dt.$$

Se tiene que

$$\int e^{-At}\mathbf{f}(t)dt = \int \begin{bmatrix} 1-3t & t \\ -9t & 1+3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ t^{-r} \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} t^{1-r} \\ t^{-r}+3t^{1-r} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} \\ \dfrac{t^{1-r}}{1-r} + \dfrac{3t^{2-r}}{2-r} \end{bmatrix}.$$

De esta forma, la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c} + \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ 9t & 1-3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} \\ \dfrac{t^{1-r}}{1-r} + \dfrac{3t^{2-r}}{2-r} \end{bmatrix} = e^{At}\mathbf{c} + \begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} - \dfrac{t^{2-r}}{1-r} \\ \dfrac{t^{1-r}}{1-r} + \dfrac{3t^{2-r}}{2-r} - \dfrac{3t^{2-r}}{1-r} \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

b) De la parte anterior, sabemos que la solución general del sistema puede escribirse de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} t \\ 3t-1 \end{bmatrix} + \mathbf{x}_p(t),$$

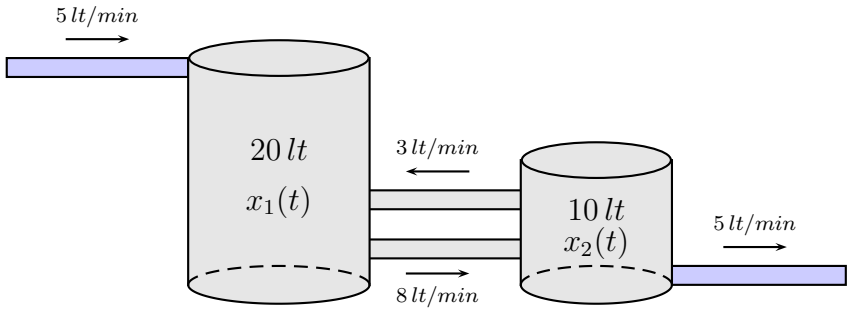
con $\mathbf{x}_p(t)$ la solución particular $\begin{bmatrix} \dfrac{t^{2-r}}{2-r} - \dfrac{t^{2-r}}{1-r} \\ \dfrac{t^{1-r}}{1-r} + \dfrac{3t^{2-r}}{2-r} - \dfrac{3t^{2-r}}{1-r} \end{bmatrix}$. Como $r > 2$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}_p(t) = 0$. Luego, el límite de $\mathbf{x}(t)$ existe siempre y cuando $\lim\limits_{t\to\infty} c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} t \\ 3t-1 \end{bmatrix}$ exista. Ahora bien, el primer sumando de tal límite es constante, y el segundo es infinito siempre que $c_2 \neq 0$. Por tanto, el límite de $\mathbf{x}(t)$ existe si y solo si $c_2 = 0$. Con esto, las soluciones $\mathbf{x}(t)$ para las que $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ existe son las de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathbf{x}_p(t), \quad t > 0.$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente el único valor propio.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 0$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar un vector propio generalizado.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar la solución x_1
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar la solución x_2
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la solución particular usando el método de variación de parámetros. Si equivocó en determinar el valor propio **ó** vector propio pero de ahí en adelante no se comenten errores, asignar (**0.5 ptos**) por determinar la solución particular siempre y cuando sea admisible el calculo de todas las integrales.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la condición para que el límite exista, no es necesario que la condición sea sobre $\mathbf{x}_0$ sino sobre las constantes de la solución homogénea. Si equivocó en determinar el valor propio **ó** vector propio pero de ahí en adelante no se comenten errores, asignar (**0.5 ptos**) por determinar una condición para que el límite exista, no es necesario que la condición sea sobre $\mathbf{x}_0$ sino sobre las constantes de la solución homogénea

3. Tenemos un sistema de dos estanques conectados. El primer estanque tiene un volumen de 20 litros de salmuera y el segundo 10 litros de salmuera. Entran 5 litros de agua fresca por minuto en estanque uno y salen 5 litros de salmuera por minuto desde estanque dos. Además, los estanques son conectados y se bombea salmuera con un caudal de 8 litros por minuto desde estanque uno a dos y 3 litros por minuto desde estanque dos a uno por otro tubo. Al inicio, estanque uno tiene una salmuera con una cantidad de 180 gramos y estanque dos 40 gramos de sal. ¿Después de cuánto tiempo la **concentración** en ambos estanques es igual?



Solución. Definimos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la cantidad de sal en estanques uno y dos, en gramos. El modelo de estanques conectados nos da el sistema lineal $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} -8/20 & 3/10 \\ 8/20 & -3/10 - 5/10 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz satisfacen

$$\begin{aligned} (-\tfrac{8}{20} - \lambda)(-\tfrac{8}{10} - \lambda) - \tfrac{3}{10}\tfrac{8}{20} &= 0, \\ \lambda^2 + \tfrac{8}{20}\lambda + \tfrac{8}{10}\lambda + \tfrac{8}{20}\tfrac{8}{10} - \tfrac{3}{10}\tfrac{8}{20} &= 0, \\ \lambda^2 + \tfrac{12}{10}\lambda + \tfrac{20}{100} &= 0, \\ (\lambda + \tfrac{10}{10})(\lambda + \tfrac{2}{10}) &= 0, \end{aligned}$$

entonces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$. El primer vector propio satisface

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\frac{8}{20} + 1 & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{20} & -\frac{8}{10} + 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \frac{12}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{20} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

y elegimos $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector propio satisface

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\frac{8}{20} + \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{20} & -\frac{8}{10} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} -\frac{4}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{20} & -\frac{6}{10} \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

y elegimos $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. La solución general está dado por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{5}t}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Las condiciones iniciales nos dan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}180\\40\end{bmatrix} &= c_1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}180\\40\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2+6}\begin{bmatrix}2 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}180\\40\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}240\\400\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}30\\50\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y la solución particular está dado por

$$\mathbf{x}(t) = 30e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + 50e^{-\frac{1}{5}t}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Necesitamos el punto de tiempo T tal que la concentración es igual:

$$\frac{x_1(T)}{V_1} = \frac{x_2(T)}{V_2}.$$

Sustituir la solución particular en la condición resulta en

$$\begin{aligned}
\frac{30e^{-T} + 150e^{-\frac{1}{5}T}}{20} &= \frac{-60e^{-T} + 100e^{-\frac{1}{5}T}}{10},\\
30e^{-T} + 150e^{-\frac{1}{5}T} &= -120e^{-T} + 200e^{-\frac{1}{5}T},\\
150e^{-T} &= 50e^{-\frac{1}{5}T},\\
e^{-\frac{4}{5}T} &= \frac{1}{3},\\
-\tfrac{4}{5}T &= \ln(\tfrac{1}{3}),\\
T &= \tfrac{5}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

Entonces, después de $T = \frac{5}{4}\ln(3)$ minutos la concentración en ambos estanques es igual.

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por determinar o bien la matriz A o bien la ecuación diferencial.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente un valor propio.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente el otro valor propio.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente un vector propio.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente el otro vector propio.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la solución al PVI.
- Asignar (**1 ptos**) por establecer correctamente la ecuación que permite determinar el valor de T para las soluciones x_1 y x_2 encontradas. Si equivocó en determinar los valores propios pero de ahí en adelante no comete errores, asignar (**0.5 ptos**) por establecer correctamente la ecuación que permite determinar el valor de T para las soluciones x_1 y x_2 encontradas.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el valor de T. Si equivocó en determinar los valores propios pero de ahí en adelante no comete errores, asignar (**0.5 ptos**) por determinar el valor de T

4. Considere las trayectorias del sistema

$$x' = x + 6y$$
$$y' = -5y$$

a) Encuentre la solución general del problema.

b) Decida si existe o no una trayectoria no trivial que se aproxime asintóticamente al origen cuando $t \to \infty$. Si su respuesta es sí, exhiba explicitamente una tal trayectoria. Si su respuesta es no, justifique.

Nota: aquí trayectoria trivial quiere decir la trayectoria constante $x(t) = y(t) = 0$.

Solución.

a) La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

por lo que sus valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -5$. Por inspección obtenemos el vector propio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para λ_1, mientras que para el segundo calculamos

$$A + 5I = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde un vector propio para λ_2 es

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

b) La respuesta es que sí existe una trayectoría que cumple lo pedido. Para ello, basta tomar cualquiér solución con $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, por ejemplo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente un valor propio.
- Asignar (**0.5 ptos**) por determinar correctamente el otro valor propio.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente un vector propio. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y determina un vector propio (correctamente) para el valor propio encontrado, asignar (**0.5 ptos**) por la parte real del vector propio.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar correctamente el otro vector propio. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y determina un vector propio (correctamente) para el valor propio encontrado, asignar (**0.5 ptos**) por la parte imaginaria del vector propio.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar la solución general. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y de ahí en adelante no comete ningún error, asignar (**0.5 ptos**) por la solución general encontrada.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar al menos una solución que satisfaga la condición **aproxime asintóticamente al origen**. Si equivoca en determinar los valores propios, pero los que obtiene son números complejos, y de ahí en adelante no comete ningún error, asignar (**1 ptos**) por determinar al menos una solución que satisfaga la condición **aproxime asintóticamente al origen**.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos