Interrogación 1
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales
13 de Abril 2015

Problema 1
A las seis de la tarde de un caluroso día de verano la policía encontró el cadáver de una persona en la habitación de un lujoso hotel de Santiago, cuyas habitaciones están climatizadas a una temperatura constante de 20^0 grados.

El detective al llegar a la escena del crimen midió en 24^0 la temperatura del cuerpo en contraste con los 36^0 de un cuerpo vivo. Una hora después sin mover el cuerpo repitió la medición obteniendo 22^0. Determine la hora de su muerte.

Ayuda: La ley de enfriamento de Newton asegura que la razón de cambio de la temperatura en el tiempo $T(t)$ de un cuerpo inmerso en un ambiente a temperatura constante A es proporcional a la diferencia $(A - T(t))$

Solución. La ley de enfriamiento de Newton afirma que

$$T'(t) = k(A - T(t))$$

Para determinar la constante de proporcionalidad k utlizamos los datos dados del problema. La solución se calcula por el método de separación de variables:

$$\int_0^t \frac{dT}{20 - T} = \int_0^t k dt \Rightarrow \ln\left(\frac{20 - T(t)}{20 - T(0)}\right) = -kt\,.$$

Utilizando la información de que $T(0) = 24$, se obtiene que

$$T(t) = 20 + 4e^{-kt}.$$

Además se sabe que $T(1) = 22$, esto nos permite calcular k ,(tiempo se mide en horas),

$$22 = T(1) = 20 + 4e^{-k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-k} \Rightarrow k = ln(2)\,.$$

Cuando el huesped estaba vivo la temperatura era de 36 grados. Calculemos cuando (en que tiempo t) se obtiene esa temperatura

$$T(t) = 20 + 4e^{-\ln(2)t} = 36 \Rightarrow e^{-\ln(2)t} = 4 \Rightarrow t = \frac{-\ln(4)}{\ln(2)} = -2\,.$$

Por lo tanto, su muerte se produjo dos horas antes de ser encontrado, precisamente a las 4 de la tarde.

Problema 2
Considere la ecuación homogénea

$$4x^2y'' + 4xy' - 3y = 0 \qquad (1)$$

a) (3 puntos) Demuestre que para $x > 0$, la sustitución $t = \ln x$, la transforma en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

b) (3 puntos) Calcule funciones ϕ_1 , ϕ_2 soluciones li tal que toda solución y de la ecuación homogénea se representa por $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

Solución:

a) Considerando la sustitución $t = \ln(x)$, para $x > 0$, y usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

Reemplazando en la ecuación, se obtiene que

$$4\frac{d^2y}{dt^2} - 3y(t) = 0\,, \quad (*)$$

que corresponde a una ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

b) La ecuación característica de (*) es

$$4r^2 - 3 = 0 \Longrightarrow r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ r = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Luego sabemos que $y_1(t) = e^{-\sqrt{3}/2\,t}$ e $y_2(t) = e^{\sqrt{3}/2\,t}$ son dos soluciones l.i. de la ecuación $(*)$, y como $t = \ln(x)$, entonces las soluciones de (1) son

$$y_1(x) = x^{\sqrt{3}/2} \quad \text{y} \quad y_2(x) = x^{-\sqrt{3}/2}\,.$$

Además el Wronskiano de y_1 e y_2 es:

$$W(y_1\,,\,y_2) = \det\begin{vmatrix} x^{\alpha} & x^{-\alpha} \\ \alpha x^{\alpha-1} & -\alpha x^{-\alpha-1} \end{vmatrix} = -2\alpha\, x^{-1} = -\sqrt{3}x^{-1} \neq 0$$

con $\alpha = \sqrt{3}/2$.

Luego, ellas son soluciones l.i. del problema (1) y en consecuencia la solución general de (1) es de la forma

$$y(x) = c_1\, x^{\sqrt{3}/2} + c_2\, x^{-\sqrt{3}/2}\,.$$

Problema 3

Considere el problema de valor inicial $y' = (1-y^2)(y+2)\,, \quad y(0) = a.$

Determine todos los valores $a \in \mathbb{R}$ de tal manera que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1.$

Solución.

Puesto que la ecuación es autónoma podemos aplicar el análisis cualitativo,

Los ceros de del potencial $V(y) = (1-y^2)(y+2)$ predice las soluciones de equilibro. Estas son:

$$y_1(x) = -2\,, \quad y_2(x) = -1\,, \quad y_3(x) = 1$$

- Para $a > 1$ el potencial $V(y)$ es negativo el la region $[0,\infty)\times]1,\infty[$, luego las soluciones que empiezan con $a > 1$ decrecen en el tiempo y su asíntota deber a. Por lo tanto si la condición inicial $y(0) = a > 1$ se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 1\,.$$

- Para $a = 1$, y(x)=1 para todo x es solución y cumple lo pedido.

- Analicemos el caso en que $-1 < a < 1$. En este caso el potencial $V(y)$ resulta ser positivo en la franja $[0,\infty)\times]-1,1[$. Por lo tanto la solución es creciente y no puede atravezar la línea $y = 1$, por unicidad. Por lo tanto se obtiene que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1\,.$

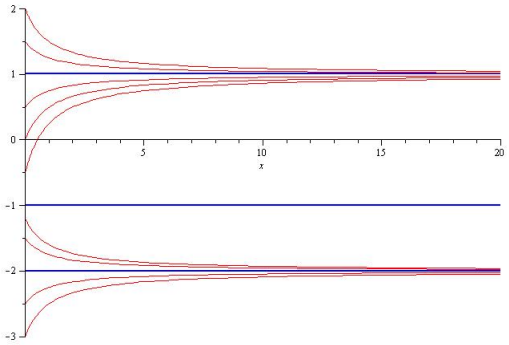
- Para $a = -1$ no se cumple la condción pedida.

- Examinemos el caso $-2 < a < -1$. En la correspondiente región el potencial $V(y)$ es negativo, luego la solución decrece y no puede tender a 1.

- Para $a < -2$, el potencial es positivo, luego la solución es creciente y se acerca a la solución estacionaria $y = -2$.

La respuesta precisa es $a > -1$

Resumiendo, el diagrama es el siguiente:



Problema 4
Considere la ecuación diferencial

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0\,.$$

a) (2 puntos) Determine todas las soluciones tales que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

b) (4 puntos) Determine todas las soluciones tales que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución:

a) Mediante la sustitución $v = y'$ las condiciones iniciales para v son $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$ y la ecuación se transforma en:

$$v'' - 4v' + 5v = 0\,, \quad v(0) = 0, v'(0) = 0.$$

Por el teorema de existencia y unicidad la única solución posible es $v(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $y'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Integrando se obtiene que $\int_0^x y'(s)ds = 0$. Por Teorema Fundamental del cálculo, $y(x) - y(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Similarmente, Mediante la sustitución $v = y'$ las condiciones iniciales para v son $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$ y la ecuación se transforma en:

$$v'' - 4v' + 5v = 0\,, \quad v(0) = 0\,.$$

El polinomio característico asociado a la ecuación es $r^2 - 4r + 5$, el cual tiene raices complejas, $r_1 = 2 + i$, $r_2 = 2 - i$.

La solución general es

$$v(x) = ae^{2x}\text{sen}(x) + be^{2x}\cos(x)$$

Además $v(0) = 0$. Luego, $v(0) = b = 0$. Por lo tanto,

$$v(x) = ae^{2x}\text{sen}(x)\,.$$

De esta forma $v(x) = y'(x) = ae^{2x}\text{sen}(x)$ y

$$y(x) = y(0) + a\int_0^x e^{2x}\text{sen}(x)\,.$$

Por lo tanto, usando que $y(0) = 0$ se obtiene la familia de soluciones parametrizada por el parámetro a,

$$y(x) = \frac{a}{5} + \frac{2a}{5}e^{2x}\text{sen}(x) - \frac{a}{5}e^{2x}\cos(x)\,.$$