MAT1640 - EDO

Ecuaciones Diferenciales (Cátedra 5)

Benjamín Palacios

Pontificia Universidad Católica de Chile

2do semestre 2022

Repaso de la clase anterior

EDO's lineales de primer orden: $y' + P(x)y = Q(x)$

- Existencia y unicidad de soluciones al PVI:

  - P, Q continuas en (a, b)
  - $x_0 \in (a, b)$

  $\Rightarrow$ Existe una única solución al PVI $y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0,$ en (a, b).

- La solución se calcula mediante el método del factor integrante

- Si P no es continua en x_0, o bien, Q no es continua en x_0, entonces puedo que exista 0, 1 o múltiples soluciones.

Vimos un ejemplo de resolución de EDO lineal $\rightarrow$ condición inicial crítica

Vimos además un ejemplo de modelación matemática:

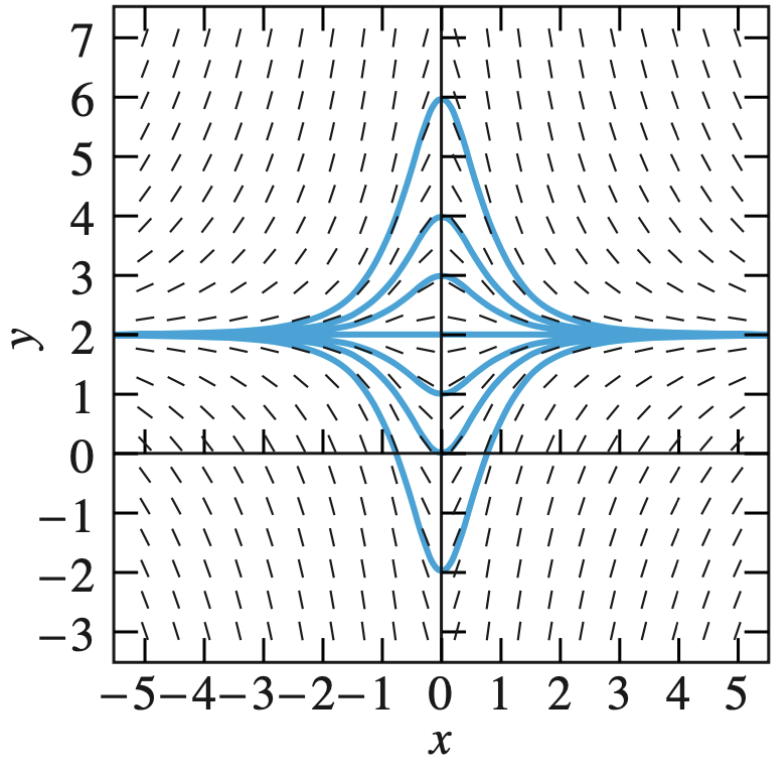
$\rightarrow$ Problema de mezclas

Otro ejemplo de resolución de EDO lineal:

- $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 6x$

Solución general:

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-3/2}$$



¿Que tiene de especial la solución del PVI con $y(0) = 2$?

A las soluciones constantes se les suele llamar soluciones de equilibrio (esta denominación toma mayor sentido si se interpreta la variable independiente como *tiempo*)

Hasta el momento hemos visto 2 grandes grupos de EDO's de primer orden que sabemos resolver:

- de variable separable
- lineales de 1er orden

Recordemos que en el cálculo de integrales, hay formas de simplificar una integral mediante el uso de una sustitución (o cambio de variable).

Algo similar ocurre con algunas EDO's.

Existen ecuaciones de 1er orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

que se pueden simplificar mediante una **sustitución**, es decir, definiendo una nueva variable dependiente

$$v = \alpha(x, y)$$

que satisface una EDO de variable separable o lineal.

La dificultad está en ser capaz de encontrar la sustitución $v = \alpha(x, y)$.

Se busca: **1)** simplificar el lado derecho de la EDO (es decir $f(x, y)$)
2) poder despejar y en función de v (es decir, $y = \beta(x, v)$)

Veremos 4 tipos de ecuaciones que se pueden simplificar

Ejemplo simple de resolución por sustitución

- $\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$

Sustitución:

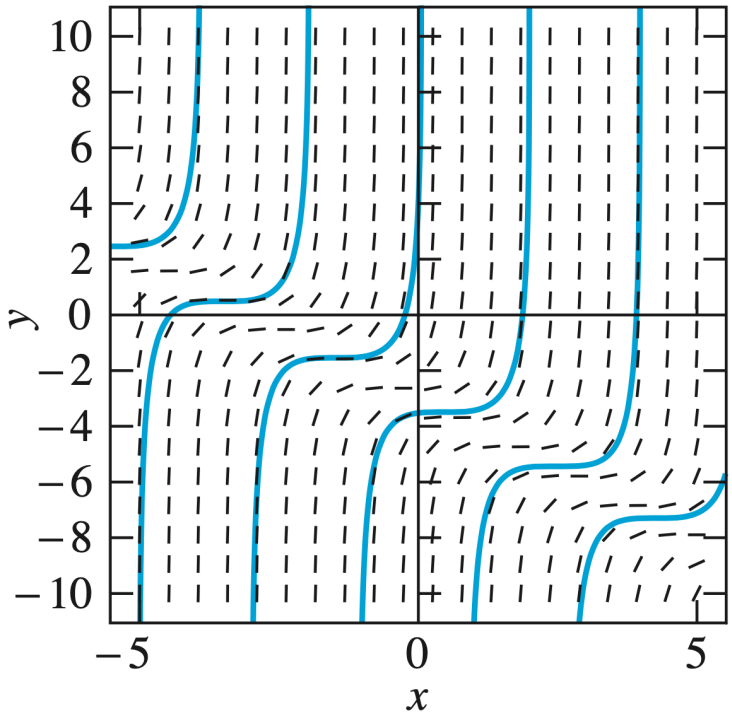
$$v = x + y + 3$$

Notamos que:

$$y = v - x - 3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

EDO para v:

$$\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 \quad \text{(variable separable)}$$



Solución general:

$$v = \tan(x - C) \;\Rightarrow\; y = \tan(x - C) - x - 3$$

Obs. Notar los dominios de las soluciones $\longrightarrow$ $x \in (C - \pi/2, C + \pi/2)$

En general, todas las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\boxed{y' = F(ax + by + c)}$$

con a, b, c constantes, se pueden transformar en una de variable separable.

Usamos la sustitución:

$$v = ax + by + c;$$

la cual simplifica el lado derecho de la ecuación:

$$\text{se transforma en} \quad F(v);$$

y se puede despejar y en función de v: $\quad y = \dfrac{1}{b}(v - c - ax)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dv}{dx} - \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dv}{dx} = bF(v) + a}_{\text{EDO de var. separable}}$$

Def. Una EDO de 1er orden se dice **homogénea** si se puede escribir de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

¿Cómo simplificamos esta ecuación?

Sustitución: $v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x\frac{dv}{dx} = F(v) - v}$$

EDO de var. separable

Ejemplos de ecuaciones homogéneas:

1) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

2) Toda EDO de la forma

$$Ax^m y^n \frac{dy}{dx} = Bx^p y^q + Cx^r y^s$$

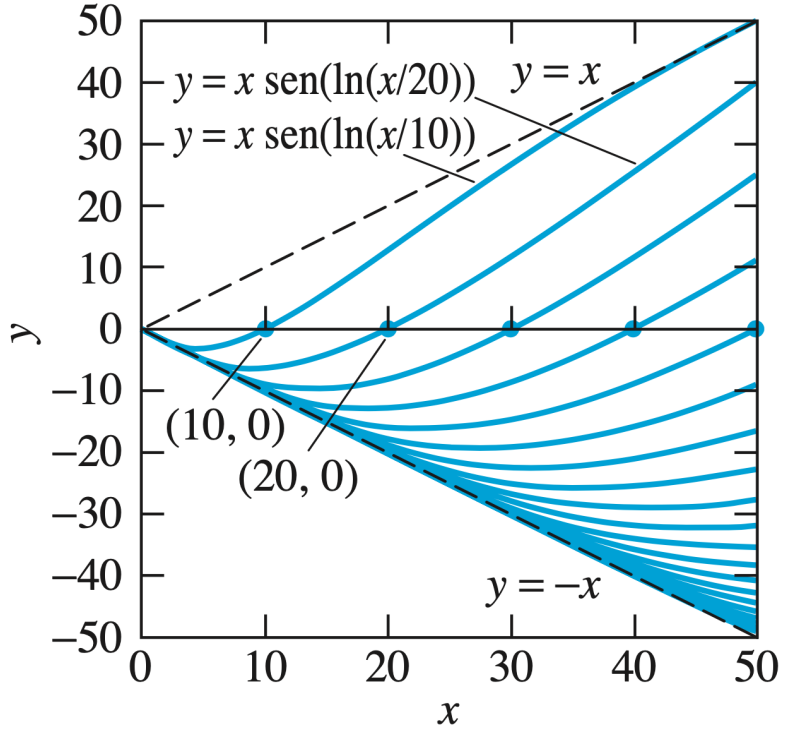
con $A, B, C \in \mathbb{R}$ constantes y exponentes $m+n = p+q = r+s = K \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de resolución de ecuaciones homogéneas

1. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(x_0) = 0, \quad x_0 > 0$

La ecuación se reescribe como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$



Sustitución:

$$v = y/x \quad (\text{o} \quad y = vx)$$

Notamos que:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

EDO para v:

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2} \quad \text{(variable separable)}$$

Solución particular:

$$v = \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad y = x\operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right), \quad x > 0$$

2. $2xy\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$

La ecuación se reescribe como:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sustitución:

$$v = y/x \quad (\text{o} \quad y = vx)$$

Notamos que:

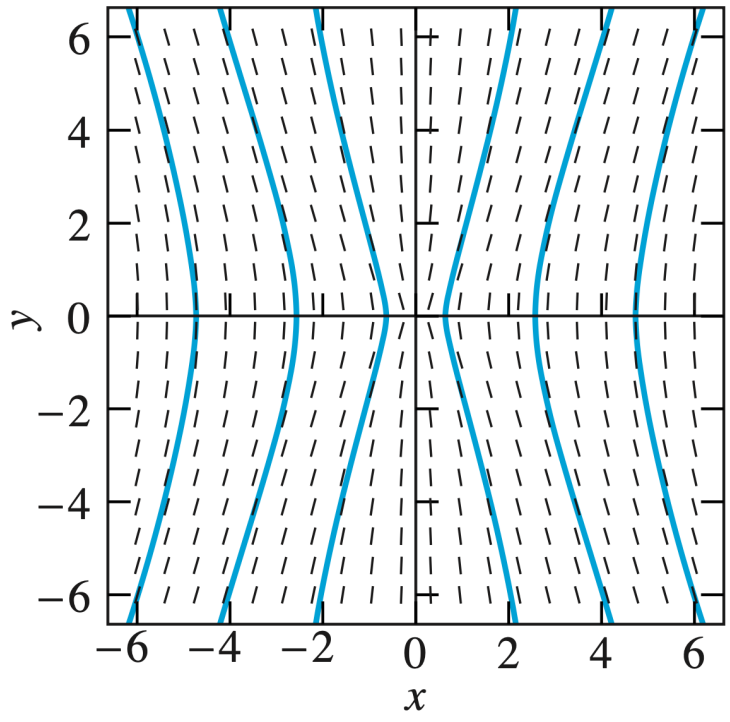
$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

EDO para v:

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{v} + \frac{1}{2}v$$

Solución general:

$$\frac{y^2}{x^2} + 4 = k|x|, \quad k > 0$$



Def. Una EDO de 1er orden se dice **de Bernoulli** si se puede escribir de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R}}$$

¿Cómo simplificamos esta ecuación? Si $n \neq 0, 1$

Sustitución: $v = y^{1-n}$ $\Rightarrow$ $\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)}_{\text{EDO lineal}}$$

Ejemplo de resolución de ecuación de Bernoulli

- $x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$

La ecuación se reescribe como:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3} \quad \rightarrow \quad n = 4/3$$

Sustitución:

$$v = y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-\frac{1}{3}}$$

Notamos que:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\frac{dy}{dx}$$

EDO para v:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1$$

Solución general:

$$y(x) = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}$$

Def. Una EDO de 1er orden se dice **de Riccati** si se puede escribir de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)}$$

¿Cómo simplificamos esta ecuación?

Supongamos que conocemos una solución particular $y_1(x)$.

Sustitución: $y = y_1 + \dfrac{1}{v}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dv}{dx} + \left(B(x) + 2A(x)y_1(x)\right)v = A(x)}_{\text{EDO lineal}}$$

Ejemplo de resolución de ecuación de Riccati

- $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$

Solución particular:

$$y_1(x) = x$$

Sustitución:

$$y = x + \frac{1}{v}$$

Notamos que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

EDO para v:

$$\frac{dv}{dx} = -1$$

Solución general:

$$v = -x + C \quad \Rightarrow \quad y = x + \frac{1}{C - x}$$