PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
2024, Segundo Semestre.

Interrogación 1
Ecuaciones Diferenciales

1. Considere el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{y-2} \\ \\ y(a) = b. \end{cases} \tag{1}$$

a) **(0,4 ptos)** Identifique los pares (a, b) que cumplen la hipótesis del teorema de existencia y unicidad.

b) **(0,4 ptos)** Demuestre que

$$y_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + (x-1)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

es una solución para el problema con condición inicial $y(1) = 2$.

c) **(0,4 ptos)** Encuentre otra solución para el problema con la misma condición inicial $y(1) = 2$.

Solución:

a) El teorema de existencia y unicidad tiene como hipótesis que para la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ la funciónes f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ sean contínuas en una caja que contiene en su interior al punto (a, b). En este caso $f(x, y) = 2\sqrt{y-2}$ es contínua en su dominio $\{(x, y) : y \geq 2\}$. Los puntos (x, y) tales que f es contínua en una caja alrededor de (x, y) es $\{(x, y) : y > 2\}$. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = (y-2)^{-1/2}$ es contínua en su dominio $\{(x, y) : y > 2\}$ y los puntos (x, y) tales que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es contínua en una caja alrededor de (x, y) es $\{(x, y) : y > 2\}$. Por lo tanto los pares (a, b) que satisfacen las hipótesis son los que tienen $b > 2$.

b) Se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Y esto permite verificar la ecuación.

c) La solución constante $y(x) = 2$.

Corrección:

a) 0,2 puntos por verificar la condición de la continuidad para $f(x, y)$ y 0,2 puntos por verificar la condición de la continuidad para $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) 0,2 por calcular la derivada de y_1 y 0,2 por verificar que cumple la ecuación.

c) 0,4 por dar una solución y verificar que cumple la ecuación.

2. Resuelva el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y(y-2) \\ \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Solución: Note que la ecuación diferencial es una ecuación separable. Luego, existe c en $\mathbb{R}$ tal que

$$\int \frac{1}{y(y-2)} dy = x + c.$$

Lo que equivale a

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y-2} \right| = x + c. \tag{3}$$

Usando la condición inicial tenemos que

$$c = -\frac{1}{2} \ln |-1| = 0.$$

Por otro lado por el teorema de existencia y unicidad la solución debe permanecer entre las soluciones constante igual a 0 y constante igual a 2. Luego, se tiene que

$$\left| \frac{y}{y-2} \right| = -\frac{y}{y-2}.$$

Junto con la ecuación (3) esto implica que

$$y(x) = \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

es la solución de (2).

Corrección:

a) 0,8 por la solución general aunque no esté despejada la solución y como en (3).

b) 0,2 por calcular la constante.

c) 0,2 por la solución particular al problema con condición inicial. Sólo 0,1 puntos si no despejan y en función de x.

d) También se puede resolver considerando que la ecuación es de Bernoulli. En ese caso dar 0,2 por hacer la sustitución, 0,6 por resolver la ecuación lineal, 0,2 por calcular la solución al problema original (Sólo 0,1 puntos si no despejan y en función de x), y 0,2 por despejar la constante.

3. Un tanque con capacidad de 30 litros, contiene inicialmente 15 litros de agua salada con 6 gramos de sal. Suponga que se vierte al tanque agua salada con una concentación de 1 gramo de sal por litro a razón de 2 litros por minuto, mientras que una solución bien mezclada sale del fondo del tanque a razón de 1 litro por minuto. ¿Cuánta sal se encuentra en el tanque cuando está lleno?

   Solución: Primera escribamos una ecuación diferencial que modele la cantidad de sal en el tanque antes que se llene. Denotemos por $x(t)$ la cantidad de sal en gramos en el tiempo t medido en minutos. La concentración de sal del agua salada que entra es $c_e = 1$ gramos/litro, y entra a una razón de $r_e = 2$ litros/minuto. Por otro lado, la solución sale a una razón $r_s = 1$ litros/minuto. La concentración de sal en la solución que sale es de $x(t)/\text{Vol}(t)$ gramos/litro, donde $\text{Vol}(t)$ es el volumen de agua salada en el tanque a tiempo t y viene dado por $\text{Vol}(t) = 15 + (r_e - r_s)t = 15 + t$. Luego, la ecuación diferencial que modela la cantidad de sal es en tanque es

$$x' = r_e c_e - r_s \frac{x}{\text{Vol}(t)}.$$

   Reemplazando los datos nos da la siguiente ecuación lineal

$$x' = 2 - \frac{x}{15+t}. \tag{4}$$

   Esta ecuación es equivalente a

$$x' + \frac{x}{15+t} = 2,$$

   y tiene como factor integrante $\rho(t) = 15 + t$. Luego,

$$\frac{d}{dt}\left((15+t)x\right) = 2(15+t).$$

   Integrando queda

$$(15+t)x = (15+t)^2 + C,$$

   con C una constante real. Luego, la solución general es

$$x(t) = 15 + t + \frac{C}{15+t},$$

con C una constante real. Usando que $x(0) = 6$ tenemos que $C = -135$. Luego, la cantidad de sal en el tanque hasta que se llena es

$$x(t) = 15 + t - \frac{135}{15+t}.$$

Ahora tenemos que ver cuando se llena el tanque, para esto hay que resolver $\text{Vol}(t) = 30$, es decir, $15 + t = 30$. Luego, el tanque se llena a los 15 minutos. Reemplazando $t = 15$ en la solución obtenemos que la cantidad de sal cuanto el tanque se llena es $x(15) = 30 - \frac{135}{30} = 30 - 4 - 0,5 = 25,5$.

Corrección:

a) 0,4 por escribir el modelo para la cantidad de sal como en (**??**).

b) 0,4 por resolverlo y encontrar la solución con la condición inicial.

c) 0,4 por calcular la cantidad de sal en el tanque cuando está lleno.

4. Verifique que la siguiente ecuación es exacta y encuentre su solución general. Basta con expresar la solución en forma implícita.

$$(\cos(x) + \ln(y))\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} + \exp(y)\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Solución: Denotemos $M(x, y)$ la función $\cos(x) + \ln(y)$, y por $N(x, y)$ la función $\frac{x}{y} + \exp(y)$. Para verificar que la ecuación es exacta basta con verificar que se cumple la igualdad $M_y = N_x$. Calculando las derivadas parciales vemos que

$$M_y = \frac{1}{y},$$

y que

$$N_x = \frac{1}{y}.$$

Luego, la ecuación es exacta.

Para encontrar la solución general tenemos que encontrar una función $F(x, y)$ tal que $F_x = M(x, y)$ y $F_y = N(x, y)$. La función $F(x, y) = \text{sen}(x) + x\ln(y) + \exp(y)$ cumple con lo pedido. Así, la solución general viene dada de forma implícita por la ecuación

$$\text{sen}(x) + x\ln(y(x)) + \exp(y(x)) = C$$

para toda constante C en $\mathbb{R}$.

5. Encuentre la solución general de

$$xy'' + y' = 4x$$

para $x > 0$.

Corrección:

a) 0,4 por verificar que es exacta.

b) 0,4 por calcular $F(x, y)$ que cumple que $F_x = M(x, y)$ y $F_y = N(x, y)$.

c) 0,4 por escribir las solución general de forma implícita.

Solución: Observe que la ecuación es una ecuación de orden 2 sin la variable y. Luego, podemos hacer la sustitución $p = y'$ para reducir el orden de la ecuación. Esto nos da la ecuación:

$$xp' + p = 4x.$$

Para $x > 0$ esta ecuación es equivalente a la ecuación lineal

$$p' + \frac{1}{x}p = 4.$$

Que tiene como factor integrante $\rho(x) = x$. Así,

$$\frac{d}{dx}(xp) = 4x.$$

Luego,

$$xp = 2x^2 + C_1,$$

para toda constante C_1 en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la solución general de esta ecuación lineal es

$$p(x) = 2x + \frac{C_1}{x},$$

con $x > 0$. Finalmente, para calcular la solución general de la ecuación original debemos resolver $y' = p$. Lo que nos da

$$y = x^2 + C_1 \ln(x) + C_2$$

con C_1 y C_2 constantes reales.

Corrección:

a) 0,2 por hacer el cambio de variables correctamente.

b) 0,6 por resolver la nueva ecuación.

c) 0,4 por encontrar la solución al problema original.