Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 12

Sistemas de ecuaciones no homogéneos

1. Se tiene una matriz fundamental $\Phi(t)$ de un sistema $x' = Ax$. Calcule e^{At} y resuelva:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x' = Ax + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Utilice el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución del sistema

   (a)
   $$x' = 2x + 4y + 2, \quad y' = x + 2y + 3; \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

   (b)
   $$x' = x - 2y, \quad y' = 2x - y + e^t \operatorname{sen} t$$

3. Resuelva el sistema mediante el método de variación de parámetros:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Sea el PVI

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Tomando en cuenta que $A = I + N$, donde I es la matriz identidad y $N^3 = 0$, la solución del PVI es:

   (a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t + 2t^2 \\ 1 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t + 4t^2 \\ 1 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 4t + 4t^2 \\ 1 + 4t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 4t + 2t^2 \\ 1 + 4t \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Suponga que tiene dos tanques de salmuera conectados por una tubería. Los volúmenes de los dos tanques son $V_1 = 100$ y $V_2 = 200$ (L). Supóngase que los dos tanques contienen inicialmente agua fresca y el flujo que entra al tanque 1, a una velocidad de 10 L/min, tiene una concentración de sal de 2 kg/L.

   (a) Encuentre las cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los dos tanques después de t min.

   (b) Obtenga la cantidad de saturación (a largo plazo) de sal en cada uno de los tanques.

   (c) Determine cuánto tiempo tarda cada tanque en alcanzar la concentración de sal de 1 kg/L.

Estudio cualitativo de sistemas no lineales

6. Encuentre los puntos críticos de los siguientes sistemas y determine a qué plano de fase corresponde:

   (a) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 2y$

   (b) $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 3y$

   (c) $\dfrac{dx}{dt} = x - y - x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$

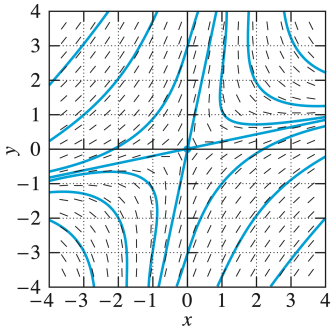


FIGURA 6.1.14. Punto silla $(0, 0)$.

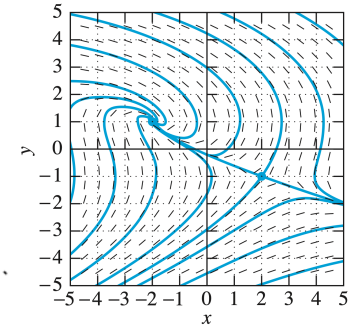


FIGURA 6.1.12. Punto espiral $(-2, 1)$ y punto silla $(2, -1)$.

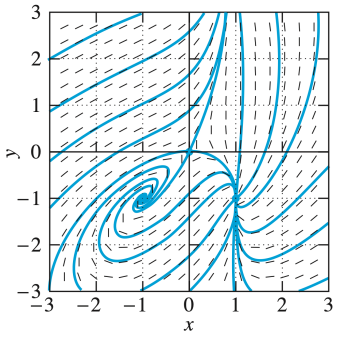


FIGURA 6.1.17. Punto espiral $(-1, -1)$, punto silla $(0, 0)$ y nodo $(1, -1)$.

7. Encuentre las soluciones de equilibrio de las siguientes ecuaciones de segundo orden:

   (a) $x'' + 4x - x^3 = 0$

   (b) $x'' + 2x' + x + 4x^3 = 0$

   (c) $x'' + 3x' + 4 \operatorname{sen} x = 0$

8. Encuentre las trayectorias de los siguientes sistemas de ecuaciones:

   (a) $\dfrac{dx}{dt} = 4y\left(1 + x^2 + y^2\right), \quad \dfrac{dy}{dt} = -x\left(1 + x^2 + y^2\right)$

   (b) $\dfrac{dx}{dt} = y^3 e^{x+y}, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x^3 e^{x+y}$