Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
3 de abril de 2017

MAT 1640 - Ecuaciones Diferenciales
Interrogación N° 1

1. Un cadáver fue hallado en un cuarto cerrado donde la temperatura era constante e igual a 70°F. Al momento del descubrimiento la temperatura del cadáver era de 85°F. Una hora después, una segunda medición mostró que la temperatura del cadáver era de 80°F. Si $t = 0$ correponde al instante de la muerte y en ese instante la temperatura de la persona era de 98,6°F, determine cuánto tiempo transcurrió antes de que se encontrara el cadáver.

Solución

Sea $t = 0$ el instante de la muerte y $t = T$ el tiempo transcurrido hasta hallar el cadáver (T es pues la incógnita)

Si $x(t) =$ tempreatura (en °]C) del cadáver t horas depus de la muerte, entonces

$$x(0) = 37 \quad (\mathbf{1}) \qquad x(T) = 30 \quad (\mathbf{2}) \qquad x(T+1) = 25 \quad (\mathbf{3})$$

La ley de enfriamiento de Newton dice que $x' = k(20 - x)$.

Su solución general es $x(t) = 20 + C\,e^{-kt}$

Usando la condición inicial (1) obtenemos $A = 17$ y por tanto $x(t) = 20 + 17e^{-kt}$

Ahora usamos (2) y (3) obteniendo el sistema (para k y T)

$$30 = 20 + 17e^{-kT} \qquad \Rightarrow \qquad 10 = 17e^{-kT}$$

$$25 = 20 + 17e^{-k(T+1)} \qquad \Rightarrow \qquad 5 = 17e^{-kT}e^{-k}$$

Dividiendo obtenemos $e^{-k} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = -\ln(2)$

Sustituyendo llegamos a que $T = -\dfrac{\ln(10/17)}{\ln(2)}$ $(\approx 0,76)$ hrs.

2. Encuentre la solución general de:

a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2 \sin(3x)\,.$

Respuesta : Es una *ecuación lineal* con

$$P(x) = -\frac{1}{x}\,; \quad Q(x) = x^2 \operatorname{sen}(3x)\,.$$

Tiene factor integrante $g(x) = e^{\int P(x)\,dx}$.
Como

$$\int P(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} = \ln(x^{-1}) \qquad \text{tenemos que} \qquad g(x) = \frac{1}{x}\,.$$

multiplicando la ecuación por $g(x)$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = x\sin(3x) \qquad \Longrightarrow \qquad y = x\left(\int x\sin(3x)\,dx + C\right)$$

Integrando por partes:

$$\int x\sin(3x)\,dx = \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x) - \frac{x}{3}\cos(3x)\,.$$

Por tanto, $y(x) = \dfrac{x}{9}\operatorname{sen}(3x) - \dfrac{x^2}{3}\cos(3x) + Cx$

b) $\left(y + \dfrac{x}{\tan\frac{y}{x}}\right)dx - x\,dy = 0$ (o equivalentemente $\left(y + \dfrac{x}{\tan\frac{y}{x}}\right) - x\,y' = 0$).

Respuesta : Es una ecuación de tipo *homogéna*. Mediante la sustituciín $y = xv$ se tranforma en

$$v + xv' = v + \cot v \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan v\,dv = \frac{dx}{x} : \qquad \text{Separable}$$

Integrando obtenemos

$$-\ln|\cos(v)| = \ln|Cx| \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{C}{x}\right)$$

de donde, sustituyendo de nuevo obtenemos $y = x\operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{C}{x}\right)$.

3. Encuentre un factor integrante tal que la ecuación

$$y + (2x - ye^y)y' = 0 \ \text{ (o equivalentemente } y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0)$$

se transforme en una ecuación exacta. Resuélvala.

Solución: Buscamos un factor integrante de la forma $\mu = \mu(y)$, con lo que se llega a la ecuación

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{y},$$

y por tanto tomaremos $\mu(y) = y$. La ecuación se convierte en:

$$y^2\,dx + (2xy - y^2e^y)dy.$$

Buscamos una familia $F(x, y) = C$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2, \ \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy - y^2e^y.$$

Integrando la primera identidad con respecto a x obtenemos

$$F(x, y) = xy^2 + G(y),$$

y por tanto

$$G'(y) = -y^2e^y.$$

Integrando dos veces por partes

$$G(y) = -y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + C.$$

Así la solución es

$$xy^2 \ - \ y^2e^y \ + \ 2ye^y \ - \ 2e^y \ \ = \ \ C.$$

4. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^4 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de (x_0, y_0) existe una solución local del problema? ¿Es única?

b) ¿Existe algún par (x_0, y_0) donde la solución sea global (es decir, definida en todo $\mathbb{R}$)? Si la respuesta es sí, ¿es cierto que la solución es global para todo (x_0, y_0)?

Solución:

a) Llamamos $f(x, y) := y^4$. Tanto f como $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ por lo que, por el Teorema De Existencia y Unicidad de Picard, existe una solución única localmente para todo par de puntos (x_0, y_0).

b) Si tomamos el par $(0, 0)$, la solución al problema es la recta $y = 0$, que está definida globalmente para todo $\mathbb{R}$.

No, la solución no es global para todo (x_0, y_0). Si tomamos por ejemplo el punto inicial $(0, 1)$, la solución del problema en este caso es

$$y(x) = \left(\frac{1}{1 - 3x}\right)^{1/3},$$

que no está definida para $x = \frac{1}{3}$.