PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

MAT1630 - Control 2

NOMBRE:.....

1. La base de una cerca está dada por la ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = 2t$ con $0 \leq t \leq 1$ metros. La altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la función $h(x, y) = 100xy$ metros.

   Suponga que 1 litro de pintura cubre 100 m^2. Demuestre que la cantidad de litros de pintura que se necesita para pintar la cerca por ambos lados es

   $$4\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}dt$$

   Solución:

   Hay que calcular el área A de la acerca y luego multiplicarlo por dos (ambos lados). La cantidad de pintura requerida será entonces $\dfrac{2 \cdot A}{100}$ litros.

   Se tiene que

   $$A = \int_C h(x, y)ds$$

   con C la curva $r(t) = (t^2, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$

   Luego $A = \displaystyle\int_C h(x, y)ds = \int_0^1 h(r(t))||r'(t)||dt = 200\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}dt.$

   y por lo tanto se necesitan $4\displaystyle\int_0^1 t^3\sqrt{4t^2+4}dt$ litros de pintura.

2. Calcular

$$\int_C z^2 dx + \int_C x^2 dy + \int_C y^2 dz$$

donde C es el segmento de recta que comienza en $(1, 0, 0)$ y termina en $(4, 1, 2)$.

Solución:

El segmento queda parametrizado como $x = 1 + 3t, \quad y = t, \quad z = 2t \quad$ con $0 \leq t \leq 1$

Por lo que

$$\int_C z^2 dx = \int_0^1 12t^2 = 4$$

$$\int_C x^2 dy = \int_0^1 (1 + 3t)^2 = 7$$

$$\int_C y^2 dz = \int_0^1 2t^2 = \frac{2}{3}$$

Por lo que

$$\int_C z^2 dx + \int_C x^2 dy + \int_C y^2 dz = \frac{35}{3}$$