Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Daniel Gajardo
Ayudante: Camila Pérez

Cálculo III - MAT1630

Interrogación 3 - Solución

1. Sea S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre el plano $z = 0$ y el plano $y + z = 1$.

   (a) Parametrice la superficie S.

   Solución. Una posible parametrización es

   $$\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), z) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \operatorname{sen}(\theta).$$

   □

   (b) Encuentre el área de S.

   Solución. Sabemos que $\text{Área}(S) = \iint_D |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| dA$, donde D es el dominio de la parametrización. Se tiene que

   $$\begin{aligned}
   &\mathbf{r}_\theta(\theta, z) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0),\\
   &\mathbf{r}_z(\theta, z) = (0, 0, 1),\\
   &\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0),
   \end{aligned}$$

   por lo que $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = 1$ para todo θ y z en el dominio. Así,

   $$\begin{aligned}
   \text{Área}(S) &= \iint_D |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| dS\\
   &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\operatorname{sen}(\theta)} 1 dz d\theta\\
   &= \int_0^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}(\theta) d\theta\\
   &= (\theta + \cos(\theta))|_0^{2\pi} = 2\pi
   \end{aligned}$$

   □

Distribución de puntaje:

- **a)** [**1.5p**] Por alguna parametrización correcta.
- **a)** [**0.5p**] Por el dominio de la parametrización.
- **b)** [**1p**] Por las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ (0.5 cada una).
- **b)** [**0.5p**] Por el vector normal.
- **b)** [**0.5p**] Por la norma del vector normal
- **b)** [**1p**] Por saber que $\text{Área}(S) = \iint_D |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| dS$
- **b)** [**1p**] Por el cálculo correcto de la integral.

2. (a) Calcule $\iint_S y dS$, donde S es la superficie parametrizada por

$$\mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), v), \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le \pi.$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u(u,v) &= (\cos(v),\, \mathrm{sen}(v), 0)\\
\mathbf{r}_v(u,v) &= (-u\,\mathrm{sen}(v), u\cos(v), 1)\\
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v(u,v) &= (\,\mathrm{sen}(v), -\cos(v), u)
\end{aligned}$$

por lo que $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{1+u^2}$. Así si D es el dominio de la parametrización, entonces

$$\begin{aligned}
\iint_S y dS &= \iint_D u\,\mathrm{sen}(v)|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA\\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\,\mathrm{sen}(v)\sqrt{1+u^2} dv du\\
&= \int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,(-\cos(v))\big|_0^{2\pi}\, du, \quad \text{sustituimos } t = 1+u^2\\
&= \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{t}\cdot 2dt\\
&= \frac{2t^{3/2}}{3}\Big|_1^2\\
&= \frac{2(\sqrt{8}-1)}{3}
\end{aligned}$$

□

(b) Sea S la parte del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$ sobre el plano $z = 0$, orientado con las normales hacia arriba. Calcule el flujo de $\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^z, -xe^z, 2x^2+2y^2+z)$ a través de S.

Solución. **Opción 1:** Podemos parametrizar el paraboloide. Una opción es $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1-x^2-y^2$, con dominio $D = \{x^2+y^2 \le 1\}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_x(x,y) &= (1, 0, -2x)\\
\mathbf{r}_y(x,y) &= (0, 1, -2y)\\
\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y(x,y) &= (2x, 2y, 1)
\end{aligned}$$

Notamos que el vector normal $(2x, 2y, 1)$ apunta en la dirección pedida. Luego,

$$\begin{aligned}\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (ye^{1-x^2-y^2}, -x^{1-x^2-y^2}, 1+x^2+y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dA \\ &= \iint_D 1 + x^2 + y^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r^2) r dr d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Observación: Otra posible parametrización es $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta), 1 - r^2)$, en cuyo caso el vector normal es $(2r^2\cos(\theta), 2r^2\,\text{sen}(\theta), r)$.

Opción 2: Definimos E la región entre S y el plano $z = 0$, de manera que la frontera de E orientada positivamente está formada por S y por el disco $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ con normales hacia abajo. Luego, por teorema de la divergencia,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div}\mathbf{F} dV$$

Para calcular $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ podemos usar la parametrización $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$, con dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ y vector normal $\mathbf{r}_y \times \mathbf{r}_x = (0, 0, -1)$. Luego,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (y, x, 2x^2 + 2y^2) \cdot (0, 0, -1) dA &= \iint_D -2(x^2 + y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2r^3 dr d\theta = -\pi\end{aligned}$$

Por otro lado, div$\mathbf{F}$= 1, por lo que

$$\begin{aligned}\iiint_E 1 dV = \iint_D \int_0^{1-x^2-y^2} 1 dV &= \iint_D 1 - x^2 - y^2 dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r - r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

□

Distribución de puntaje:

- **a)** [**0.5p**] Por el cálculo de las derivadas parciales.
- **a)** [**0.5p**] Por el cálculo del vector normal.
- **a)** [**0.5p**] Por la norma del vector normal.
- **a)** [**0.5p**] Por saber que $\iint_S y dS = \iint_D y(u,v)|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$.
- **a)** [**1p**] Por el cálculo de la integral.
  En caso de separar las integrales de cada variable y calcular bien solo una de ellas, evaluar con 0.5p

Opción 1:

- **b)** [**0.5p**] Por la parametrización del paraboloide.
- **b)** [**0.3p**] Por el dominio de la parametrización.
- **b)** [**0.8p**] Por el cálculo del vector normal orientado correctamente (0.3 si está orientado incorrectamente).
- **b)** [**0.4p**] Por saber que el flujo es la integral de superficie.
- **b)** [**0.4p**] Por reemplazar en la definición de integral de superficie.
- **b)** [**0.6p**] Por el cálculo de la integral.

Opción 2:

- **b)** [**0.3p**] Por definir la región E.
- **b)** [**0.2p**] Por identificar la frontera orientada correctamente.
- **b)** [**0.3p**] Por usar teorema de la divergencia.
- **b)** [**0.3p**] Por la parametrización del disco.
- **b)** [**0.1p**] Por el dominio de la parametrización.
- **b)** [**0.3p**] Por el cálculo del vector normal orientado correctamente.
- **b)** [**0.3p**] Por el cálculo de la integral sobre el disco.
- **b)** [**0.2p**] Por el cálculo de la divergencia.
- **b)** [**0.3p**] Por la integral de la divergencia.
- **b)** [**0.4p**] Por saber que el flujo es la integral de superficie.
- **b)** [**0.3p**] el resultado final

3. Considere el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (z - 2x^2, \sin(y) - 2x, 3y + \sqrt{1+z^4})$ y la curva $\mathcal{C}$ formada al intersectar el plano $x + y + z = 1$ con los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, orientada en sentido antihorario vista desde arriba. Calcule

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(*Indicación: Un dibujo de la curva, sin orientar, se encuentra al reverso de la hoja.*)

Solución. Sea S la región en el plano $x + y + z = 1$ al interior de la curva $\mathcal{C}$, orientado hacia arriba. Luego, por Teorema de Stokes,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Una parametrización de S es $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1 - x - y)$, con (x,y) en el triángulo T de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_x(x,y) = (1,0,-1)\\
&\mathbf{r}_y(x,y) = (0,1,-1)\\
&\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1,1,1)\\
&\text{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (3,1,-2)
\end{aligned}$$

De donde

$$\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T (3,1,-2) \cdot (1,1,1) dA = \iint_T 2dA = 2\text{Área}(T) = 1$$

□

Distribución de puntaje:

- **[0.7p]** Por definir una región S cuya frontera sea $\mathcal{C}$.
- **[1p]** Por la parametrización de S.
- **[0.3p]** Por el dominio de la parametrización
- **[1p]** Por la normal con la orientación correcta. (0.5 Si la orientación queda invertida).
- **[1p]** Por rot$\mathbf{F}$.
- **[1p]** Por aplicar T. de Stokes correctamente. (0.5 Si la orientación estaba invertida).
- **[1p]** Por la integral.

4. (a) Sea E una región sólida acotada cuya frontera es una superficie suave S, orientada positivamente. Demuestre que el volumen de E se puede calcular como

$$\mathrm{Vol}(E) = \iint_S (0,0,z) \cdot d\mathbf{S}$$

Solución. Por teorema de la divergencia,

$$\iint_S (0,0,z) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \mathrm{div}(0,0,z) d\mathbf{V} = \iiint_E 1 dV = \mathrm{Vol}(E).$$

□

(b) Use la parte anterior para calcular el volumen encerrado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución. Llamamos S al elipsoide y E la región encerrada por él. Una parametrización de S es

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (a\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), b\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), c\cos(\varphi)) \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\theta(\theta,\varphi) &= (-a\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), b\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), 0)\\
\mathbf{r}_\varphi(\theta,\varphi) &= (a\cos(\theta)\cos(\varphi), b\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi), -c\,\mathrm{sen}(\varphi))\\
\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta &= (bc\,\mathrm{sen}^2(\varphi)\cos(\theta), ac\,\mathrm{sen}^2(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta), ab\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi))
\end{aligned}$$

Notamos que el normal apunta hacia afuera, por lo que es una orientación positiva de S. Luego, por la parte anterior,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) = \iint_S (0,0,z) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (0,0,c\cos(\varphi)) \cdot (\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta) d\varphi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abc\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos^2(\varphi)\\
&= 2\pi abc \left(-\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{4}{3}\pi abc
\end{aligned}$$

□

Distribución del puntaje:

- **a)** [**1p**] Por usar el Teorema de la divergencia.
- **a)** [**0.5p**] Por el cálculo de la divergencia.
- **a)** [**0.5p**] Por la igualdad con el volumen.
- **b)** [**0.6p**] Por definir la región E y su frontera.
- **b)** [**0.7p**] Por la parametrización del elipsoide.
- **b)** [**0.3p**] Por el intervalo de la parametrización.
- **b)** [**0.7p**] Por el cálculo del vector normal (0.3 si la orientación es incorrecta).
- **b)** [**0.7p**] Por usar la parte anterior y reemplazar correctamente en la integral de superficie.
- **b)** [**1p**] Por el resultado final.

Curva problema 3:

